新物理学シリーズ 13

山内恭彦監修

相対論的量子力学

東京大学教授 理学博士

西島 和彦 著

培風館

はしがき

相対論的量子力学という表題はいささか羊頭狗肉であることをまずお断わりしておきたい。一つには，この表題の下には通常場の量子論が含まれるべきであるが，本書ではそこまでは書かれていないことである。もう一つは，散乱の理論を非相対論的定式化より導入しているということである。

もちろんこのようにしなければならなかったことについては一応の理由がある。場の量子論を入れなかったのは紙数の制限によるという表面的な理由もあるが，実際にはむしろ場の量子論なしにどこまで進めるか，またどのような限界にぶつかるかをはっきりさせたかったからである。すなわち，量子化されない場の理論を反面教師として，読者が後に場の量子論について学んだときにはっきりとその有難さを認識できた方がよいと判断したからである。ただ一つの例外として電磁場は量子化されるが，それはそうしないと古典論そのものになってしまうからである。

場を量子化しない場合の限界が最もはっきりと現われる例の一つは，多分断面積の計算であろう。その理由は，断面積の定義には粒子性を用い，その計算には波動性を用いるからである。波動関数に確率的解釈を与えうる Dirac 場の場合にはあまり困らないが，このような解釈のできないスカラー場やベクトル場では波動関数の漸近形は作れても，それをどうやって断面積の定義と結びつけたらよいのかが定かでない。ここでは粒子の個数という概念が，荷電とかエネルギーのように古典論・量子論に共通する概念ですりかえられている。こうして計算した結果の正当性を確立するには，やはり最終的には場の量子論によらなければならない。

また散乱理論は非相対論的定式化より出発していて確かに看板に偽りがある。しかしここで用いられた方法自身は相対論的量子論にもそのまま拡張できるものである。しかしそれを実際におし進めるためには場の量子論が必要になってしまうのである。ここで重点を置いたのは因果律と散乱問題との関係の解明であり，特に境界条件の導出である。またこの問題と Cauchy の積分定理との深い関係を指摘し，一歩進んだ S 行列理論へ進むときの準備とした。この結果，散乱問題は微分方程式よりもむしろ積分方程式によって定式化した方が便利であることが示される。特に後者に属する Lippmann-Schwinger の方程式は，散乱に関する一般的性質を調べる

のに適しており，それから出される諸関係は非相対論的散乱理論に限らず相対論的理論においてもその基礎として採用されている。このような意味で，必ずしも看板に偽りばかりではないと言えよう。

さて本書の内容は，まず Dirac 方程式の紹介から始まる。しかし一体問題の議論から出発したにもかかわらず，相対論的量子論に特有な空孔理論・陽電子等の導入によってどうしても多体問題を避けることができないことが明らかにされる。ここでも Dirac 場が最終的には量子化されなければならないことが示唆される。

また古典的な Maxwell の方程式は光子に対する Schrödinger 方程式と考えられるが，ベクトル場に対しては確率的解釈ができないので粒子性を出すには是非とも量子化が必要である。そこで電磁場は本書では唯一の例外として量子化されているが，場の量子論のエッセンスはこの量子化にすでに含まれていると言ってよい。しかしながら本書でその一般化をあえて行なわなかったのは，すでに述べた理由による。そのかわり量子化された電磁場と電子との相互作用の結果生ずる簡単で重要な過程については詳しい計算を示した。ここで強調されていることは，多くの問題において量子論と古典論とが同じ結果を与えているという事実である。このことは古典的計算により原子構造に関するある程度正しい描像が得られたという歴史的興味につながるものである。

散乱問題については，量子力学の多くの入門書は束縛状態の議論に重点を置き散乱問題にはわずかしか触れていないので，特にその基礎付けに留意し，非相対論的定式化にまでさかのぼって議論したつもりである。

付録では時間反転について論じた。この問題は Dirac 方程式の変換性のみならずもっと多くの一般的諸問題と関連しているので，初等的な事柄から出発してできるだけ閉じた形に納めるように努力した。

なお本書の内容は著者が過去十数年間にわたり Illinois 大学，東京大学等において行なった講義に基づいている。いろいろと改良すべき点につき読者諸賢より御指摘がいただければ幸いである。本書を書く機会を与えて下さった山内恭彦先生，校正その他で親身にお世話をして下さった村山高志氏に深く感謝の意を表する。

1973 年 3 月

東京にて　　西 島 和 彦

目　次

1. Dirac 方程式　1～77

2. 電磁場の量子論　78～100

3. 電磁場の量子論の応用　101～126

1. Dirac 方程式

1-1 自然単位

非相対論的量子力学は Newton 力学と同様に，論理的あるいは数学的に閉じた体系である。しかしながら自然界にはそれでは説明のできない現象がたくさんある。たとえば，素粒子の創生・消滅等を記述するには，どうしても相対論的量子力学を用いなければならない。相対論と量子力学とを結びつけることによって相互作用の形を非常に制限することができるし，また他方，非相対論的理論では存在しなかったような新らしい困難にも遭遇する。このような深刻な問題の議論はさておき，まず相対論的量子力学を記述するのに最も簡単で便利な，そしてある意味では最も不精な単位系の導入を考えよう。

机の縦と横と高さとをそれぞれ cm，inch，寸 で測るのはばかげている。このような場合同じ物さしで，すなわち同じ単位で測る方が簡単であり，また自然である。この議論を拡張して時間を cm で測ることを考えてみよう。まずAとBという二つの座標系を考え，$t=0$ で両座標系が一致していたとし，BはAに対して一定速度で x 方向に動いているものとする。いま二つの現象が起きたとして，第一の現象が起きた時空座標を，AとBとのいずれの座標系においても $t=0$, $x=0$ とする(いま簡単のために空間座標を1次元にとる)。第二の現象の起きた時空座標を，A座標系では $t=t_1$, $x=0$, B座標系では $t'=t_1'$, $x'=x_1'$ とする。そうすると特殊相対論によれば，二つの現象の間の**距離**の2乗が不変量であるから

$$c^2t_1^2=c^2t_1'^2-x_1'^2 \qquad (1)$$

という関係式が成り立つ。A座標系では2現象は空間の同一点で起こり，この2現象間の隔たりは純粋に時間的であるが，B座標系では時間と長さ

との混ざったものである。それでは時間と長さとを同じ単位で測るべきではないだろうか。

そこで出てくる問題は，それでは 1 cm の時間とは何であろうかということである。答は，1cm の時間とは光が 1cm 進むのに要する時間のことである。すなわち，$1\,\mathrm{cm}/(3\times10^{10}\,\mathrm{cm/sec})=(3\times10^{10})^{-1}\,\mathrm{sec}$ という大変短い（人間の尺度で短い）時間を意味する。ここで光速度がどんな座標系で測っても同じであるという普遍性が，このような単位の採用のために重要である。多くの不安定な素粒子の寿命は 1 cm の程度である。さて，光速度 c は光が 1 秒間に進む距離を表わすが，1 cm という新しい時間の単位に光が進む距離は定義により 1 cm である。したがってこのような新単位系では光速度は無次元の 1 となる。そこで CGS 単位系のかわりに，この新単位系で光速度を改めて c と書けば $c=1$ となる。このような単位の採用は特殊相対論によって基礎づけられたものであるが，量子力学を考えるともう一つ便利な単位が考えられる。これはミクロの世界を扱う学問であるから，いたる所に量子力学のシンボルともいうべき $\hbar$ (Planck の定数 h を 2π で除したもの）が出てくる。元来 $\hbar$ は古典力学との相違を明らかにし，人間的尺度との対比においてこれがいかに小さいものであるかを強調するのに用いられた。しかし初めからミクロの世界に限って考察を進める限りではこれは便利な単位である。光速度 c と同様に一つの普遍的定数でもある。$\hbar$ は作用の単位と考えられるし，もっと具体的には角運動量の単位にもなっている。そこで両者をあわせて

$$c=\hbar=1 \tag{2}$$

となるような新単位系を導入しよう。これを**自然単位**(natural units)とよぶ。さて CGS 単位と比べて二つの独立な単位が減るから残りは一つである。これを便宜上長さにとると，すべての物理量は cm，あるいはその適当なべきを単位として測られることになる。

自然単位で計算した結果を CGS 単位に直すには，1 とおかない c や $\hbar$ の適当なべきを乗じて，次元が CGS 単位で正しくなるようにすればよい。たとえば，ある過程の断面積が自然単位で

$$\sigma=a/m^2 \qquad (a \text{ は無次元の数，} m \text{ は質量を表わす}) \tag{3}$$

のように表わされたとする。これを cm^2，すなわち CGS 単位に直すには

$$\sigma=a\left(\frac{\hbar}{mc}\right)^2 \tag{4}$$

のように書き直してやればよい。括弧の中の量は質量 m の粒子の Compton 波長を表わし，したがって CGS 単位でも長さの次元をもっているからである。もちろん自然単位で m を cm^{-1} の単位で測ってあれば，この例に関する限り初めから正しい次元をもっているといってもよいであろう。以下では自然単位を用いる。

1-2 非相対論的量子力学†

相対論的量子力学を建設するためには非相対論的量子力学を土台としなければならない。そこでこの目的のために必要と思われることをまとめておこう。

古典的な力の場の中を動く質点の運動方程式は，次の正準方程式で与えられる。

$$\frac{dx_j}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_j},\qquad \frac{dp_j}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x_j}\qquad (j=1,\ 2,\ 3) \tag{1}$$

ただし H は，x_j と p_j との関数であり，この系のハミルトニアンを表わす。こうするとこの系の量子力学的運動方程式は次の規則により作ることができる。

1） H の中の p_j を次の微分演算子でおきかえる††。

$$p_j \longrightarrow \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_j},\qquad \text{あるいは自然単位で}\ p_j\longrightarrow\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j} \tag{2}$$

2） 波動関数 $\psi(x_j,\ t)$ を導入し，次の Schrödinger 方程式を導入する。

$$\left\{i\frac{\partial}{\partial t}-H\left(x_j,\ \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\right\}\psi(x_j,\ t)=0 \tag{3}$$

与えられた系の時間的発展はこの方程式によって決定される。

次に波動関数 ψ の確率的解釈にふれよう。

$$|\psi(x_j,\ t)|^2d^3x\qquad (d^3x=dx\,dy\,dz) \tag{4}$$

は，時刻 t において考えている粒子が，点 x_j を含む d^3x という微小体積の中に存在する確率である。多粒子系に対しても同様な解釈ができる。

次に演算子 $\mathcal{O}$ の期待値について述べよう。$\mathcal{O}$ が座標 x_j と運動量 p_j との関数で，$\mathcal{O}(x_j,\ p_j)$ のように表わせるとする。この場合，波動関数 $\psi(x_j,\ t)$

---

† 非相対論的量子力学の参考書はあげてもきりがない。たとえば本シリーズ 4，山内恭彦：量子力学 (1968) 参照のこと。

†† 今後この本では p_j と微分演算子とを区別しないで用いることがある。

がわかっていれば，その期待値は次式で与えられる。

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \int \psi^*(x_j, t)\, \mathcal{O}\left(x_j, \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\psi(x_j, t)\, d^3x \qquad (5)$$

特に $\mathcal{O} = \delta^3(x_j - a_j)$ とすれば，$\langle \mathcal{O} \rangle$ は $|\psi(a_j)|^2$ に帰着する。

さてもう少し現実的な問題を考えると，スピンという自由度が出てくる。このときには波動関数は多成分となる。たとえばスピン 1/2 に対応して 2 成分のときには

$$\psi(x_j, s, t) = \begin{pmatrix} \psi_\uparrow(x_j, t) \\ \psi_\downarrow(x_j, t) \end{pmatrix} \qquad (6)$$

そうすると $|\psi_\uparrow(x_j, t)|^2$ は点 x_j においてスピンが上向きの粒子の存在する確率密度を表わしている。また，したがって

$$\int_V \psi^* \psi \, d^3x$$

は粒子を体積 V の中に見出す確率となる。V として全空間をとれば

$$\int \psi^* \psi \, d^3x = 1 \qquad (7)$$

この式は一粒子系を考えた場合に，その粒子が消滅しない限り正しい。したがって粒子の創生・消滅が生じうる場合には，波動関数の解釈が変更を受けることになる。しかし，さしあたりそのようなことは考えないことにする。すると

$$\frac{d}{dt}\int \psi^* \psi \, d^3x = 0 \qquad (8)$$

この式はハミルトニアン H が Hermite 演算子であることと同値である。上の式は全空間について考えたときに成り立つが，有限な体積を考えると必ずしも成り立たない。すなわち一般には

$$\frac{d}{dt}\int_V \psi^* \psi \, d^3x \neq 0 \qquad (9)$$

この式をもっと詳細に表現するために Schrödinger 方程式を用いると，

$$\frac{d}{dt}\int_V \psi^* \psi \, d^3x = i\int_V (H\psi^* \cdot \psi - \psi^* \cdot H\psi)\, d^3x \qquad (10)$$

いま H として特に簡単な次の形を仮定する。

$$H = -\frac{1}{2m}\Delta + V(x_j) \qquad [V(x_j)\text{: 空間座標の実関数}] \qquad (11)$$

すると(10)の右辺は次のように書ける。

$$\frac{i}{2m}\int_V(\Delta\psi^*\cdot\psi-\psi^*\cdot\Delta\psi)d^3x$$
$$=-\frac{i}{2m}\int_V \mathrm{div}(\mathrm{grad}\,\psi^*\cdot\psi-\psi^*\cdot\mathrm{grad}\,\psi)d^3x \tag{12}$$

ところが，体積 V は空間の任意の閉じた部分を表わすから(10)の左辺と(12)とが等しいためには，被積分関数同士が等しくならねばならないことになる。

$$\frac{\partial}{\partial t}(\psi^*\psi)=-\frac{i}{2m}\mathrm{div}(\mathrm{grad}\,\psi^*\cdot\psi-\psi^*\cdot\mathrm{grad}\,\psi) \tag{13}$$

そこで次のようにおく。

$$\boldsymbol{j}=\frac{i}{2m}(\mathrm{grad}\,\psi^*\cdot\psi-\psi^*\cdot\mathrm{grad}\,\psi),\qquad \rho=\psi^*\psi \tag{14}$$

これで(13)は次の**連続の方程式**の形に書かれる。

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathrm{div}\,\boldsymbol{j}=0 \tag{15}$$

この式は確率の局所的保存則，あるいは局所的つりあいを表わす。Gauss の定理から

$$\frac{d}{dt}\int_V\rho\, d^3x=-\int_S j_n\, dS \qquad (S \text{ は } V \text{ の表面}) \tag{16}$$

と書けば，$\boldsymbol{j}$ が確率の流れ密度を表わすことは明らかである。(14)は後に散乱の理論を議論する際に重要な役割を果たす。また連続の方程式は相対論的な拡張が可能なので重要である。このような非相対論的量子力学を，相対論的に拡張する際にどのような問題が生じるかを次に議論しよう。

1-3 Klein-Gordon 方程式

自由粒子のエネルギー E と運動量 $\boldsymbol{p}$ の間には **Einstein の関係式**が成り立つ。

$$E^2=\boldsymbol{p}^2c^2+m^2c^4 \tag{1}$$

初めの約束に従って自然単位を用いて表わせば

$$E^2=\boldsymbol{p}^2+m^2 \tag{2}$$

さてこの系のハミルトニアン H はエネルギーに等しいとすると

$$H=\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2} \tag{3}$$

ところがもう一つの可能性は，**負エネルギー**解に対応して

$$H=-\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2} \tag{4}$$

ここでは前者をとることにすると，Schrödinger 方程式は

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi=\sqrt{-\nabla^2+m^2}\,\psi \qquad (\nabla^2=\Delta) \tag{5}$$

この右辺は奇妙な演算子であるから，ちゃんと定義をしておかなければならない。そこでψを Fourier 積分で表わして次のように定義しよう。

$$\psi(\boldsymbol{x},\ t)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k\varphi(\boldsymbol{k},\ t)e^{i\boldsymbol{kx}} \tag{6}$$

このとき(5)の右辺は次式で定義される。

$$\sqrt{m^2-\nabla^2}\,\psi(\boldsymbol{x},\ t)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k\sqrt{m^2+\boldsymbol{k}^2}\,\varphi(\boldsymbol{k},\ t)e^{i\boldsymbol{kx}} \tag{7}$$

この定義を用いると，ψ に対する Schrödinger 方程式は直ちに φ に対するものに書きかえられる。

$$i\frac{\partial}{\partial t}\varphi(\boldsymbol{k},\ t)=\sqrt{m^2+\boldsymbol{k}^2}\,\varphi(\boldsymbol{k},\ t) \tag{8}$$

この方程式の一般解は直ちに求められて

$$\varphi(\boldsymbol{k},\ t)=e^{-i\omega_k t}\varphi(\boldsymbol{k},\ 0), \qquad \omega_k=\sqrt{m^2+\boldsymbol{k}^2} \tag{9}$$

ところで上に考えた方程式(5)には次の二つの難点があることがわかる。

1)　H が $\boldsymbol{p}$ について非線形であるために確率の流れ密度を作ることができず，波動関数に確率的解釈が与えられなくなる。

2)　この方程式は一見相対論をとり入れたように見えるが，実は相対論における**因果律(Einstein の因果律)**† と矛盾する。

次に第二の難点について詳しく論じよう。まず初期条件として

$$\psi(\boldsymbol{x},\ t=0)=\delta^3(\boldsymbol{x}) \tag{10}$$

とおくと，これは Fourier 変換して表わしたときに

$$\varphi(\boldsymbol{k},\ t=0)=1 \tag{11}$$

となる。ゆえに任意の時刻におけるψは直ちに次の形に求められる。

$$\psi(\boldsymbol{x},\ t)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k e^{i\boldsymbol{kx}-i\omega_k t} \tag{12}$$

ゆえに

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi(\boldsymbol{x},\ t)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k\frac{{\omega_k}^2}{\omega_k}e^{i\boldsymbol{kx}-i\omega_k t}$$

$$=(m^2-\nabla^2)\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3k}{\omega_k}e^{i\boldsymbol{kx}-i\omega_k t} \tag{13}$$

$$=(m^2-\nabla^2)\{2i\Delta^{(+)}(x,\ m)\} \tag{14}$$

---

†　エネルギーはいかなる形にせよ光速度をこえて伝わることはない。

ただし $\Delta^{(+)}$ は場の量子論で重要な役割を果たす関数であり，4 次元座標 $x(\boldsymbol{x}, t)$ の Lorentz 不変な関数である。この関数は $x^2=\boldsymbol{x}^2-t^2\equiv z^2$† が正の場合，すなわち空間的な場合に，絶対値 z の関数として次のようにふるまうことが知られている。

$$\Delta^{(+)}\propto\frac{1}{z} \qquad (z\text{ が小さい場合})$$
$$\propto\frac{e^{-mz}}{\sqrt{z}} \qquad (z\text{ が大きい場合})$$

この結果は，確率の流れが光速度より速く伝わることを意味する。もし光速度以下であれば，ϕ は空間的な時空点では 0 でなければならないからである。つまり方程式(5)は **Einstein の因果律**に反することになる。この矛盾は**負エネルギーの解**を勝手に捨てたことに由来する。

そこで Einstein の方程式(2)をエネルギーについて 1 次化することなしに波動方程式を作る。それには前節で述べた規則を 4 次元化し

$$\boldsymbol{p}\longrightarrow\frac{1}{i}\nabla, \qquad E\longrightarrow i\frac{\partial}{\partial t}$$

というおきかえをしてやれば

$$(\Box-m^2)\phi=0, \qquad \text{ただし}\quad \Box=\Delta-\frac{\partial^2}{\partial t^2} \tag{15}$$

この方程式は自由粒子であればスピンに関係なしに，すなわち何成分のときでも成り立つと考えられる。この方程式を **Klein-Gordon (クライン-ゴルドン)方程式**とよぶ。ここでは簡単のために 1 成分のとき，つまりスピン 0 のときについて考える。

(15)で ϕ は時間 t について 2 階の微分方程式を満たすから

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathrm{div}\,\boldsymbol{j}=0 \tag{16}$$

を満たす ρ は $\phi^*\phi$ で与えることはできない。非相対論の場合の結果から

$$\boldsymbol{j}=\frac{i}{2m}(\mathrm{grad}\,\phi^*\cdot\phi-\phi^*\cdot\mathrm{grad}\,\phi) \tag{17}$$

を仮定すると，連続の方程式(16)を満たす ρ は次式で与えられる。

$$\rho=-\frac{i}{2m}\left(\frac{\partial\phi^*}{\partial t}\phi-\phi^*\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) \tag{18}$$

重要なことは $j_\mu=(2m\boldsymbol{j}, 2m\rho)$ という 4 次元ベクトルを導入すると，連続

† 本書では 4 次元スカラー積は $x^2=x_\mu{}^2=x_1{}^2+x_2{}^2+x_3{}^2+x_4{}^2=x_1{}^2+x_2{}^2+x_3{}^2-x_0{}^2$ を表わす。

の方程式は次のように完全に相対論的に不変な形に書けるということである。

$$\frac{\partial j_\mu}{\partial x_\mu}=0 \tag{19}$$

また，4次元ベクトル j_μ 自身も次の形に書ける。

$$j_\mu=i\left(\frac{\partial\psi^*}{\partial x_\mu}\psi-\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial x_\mu}\right) \qquad (\mu=1,\,2,\,3,\,4,\ x_4=it) \tag{20}$$

ただし j_μ と $\boldsymbol{j}$, ρ との関係は詳しくは次のように表わされる。

$$j_\mu=\begin{cases} 2m\boldsymbol{j}_k & (\mu=k=1,\,2,\,3) \\ 2m\rho & (\mu=0) \end{cases}$$

通常4次元ベクトルの第四成分は純虚数であるから，それを i で除した第0成分を成分として記しておいた方がいろいろと便利なので，その記法に従う。(18)の下の j_μ の成分はその意味である。

さて前に述べた第二の難点はこのようにして回避できるが，ρ が正定値形式でないので確率密度という解釈が成り立たない。このような困難は場の量子論を導入しない限り解決できない。

1-4 荷電粒子に対する Klein-Gordon 方程式

1成分の Klein-Gordon 方程式の波動関数に対する確率的解釈には困難を伴うことがわかったので，他の解釈をその電磁的相互作用を通して調べてみる。

いま考えている粒子の荷電を e とすると，この粒子の電磁的相互作用は

$$\boldsymbol{p}\longrightarrow\boldsymbol{p}-e\boldsymbol{A}, \qquad H\longrightarrow H+e\varphi \tag{1}$$

という **Dirac のおきかえ**によって導入される。ただし $\boldsymbol{A}$ はベクトル・ポテンシャル，φ はスカラー・ポテンシャルを表わす。相対論的量子論ではこのおきかえは次のように表わされる。

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\psi\longrightarrow\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu}-ieA_\mu\right)\psi \qquad (\mu=1,\,2,\,3,\,4,\ \text{ただし}\ A_4=i\varphi) \tag{2}$$

したがって電磁場の存在する場合の Klein-Gordon 方程式は，前節の方程式(15)において上の(2)のおきかえをすることにより，次式で与えられる。

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu}-ieA_\mu\right)^2\psi-m^2\psi=0 \tag{3}$$

同様に前節(20)の式で与えられる j_μ に(2)のおきかえを施して，流れ密度

を

$$j_\mu=\frac{1}{i}\left\{\psi^*\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu}-ieA_\mu\right)\psi-\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu}+ieA_\mu\right)\psi^*\cdot\psi\right\} \tag{4}$$

で定義すると，方程式(3)の結果として次の連続の方程式を得る。

$$\frac{\partial j_\mu}{\partial x_\mu}=0 \tag{5}$$

さて j_μ の物理的意味を知るには，**Maxwell の方程式**を書き下さなければならない。それには場の方程式を**変分形式**で与えるのが一番適している[†]。まず $\mathcal{L}$ をラグランジアン密度，L をラグランジアンとすると，両者の関係は次式で与えられる。

$$L=\int\mathcal{L}\,d^3x \tag{6}$$

そして**最小作用の原理**は次の形をとる。

$$\delta\int L\,dt=0 \tag{7}$$

荷電のない場合の自由な電磁場に対するラグランジアン密度 $\mathcal{L}_{\rm em}$ は

$$\mathcal{L}_{\rm em}=-\frac{1}{16\pi}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} \tag{8}$$

で与えられることがよく知られている。ただし $F_{\mu\nu}$ は次式で定義される。

$$F_{\mu\nu}=\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}-\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} \tag{9}$$

そうすると電場と磁場とは，それぞれ次のように与えられる。

$$F_{4k}=-F_{k4}=iE_k \quad (k=1,\,2,\,3)$$
$$F_{12}=-F_{21}=H_3 \text{ およびその巡回置換} \tag{10}$$

次に電磁場の中での Klein-Gordon 方程式(3)は

$$\mathcal{L}_{\rm KG}=-\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu}+ieA_\mu\right)\psi^*\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu}-ieA_\mu\right)\psi-m^2\psi^*\psi \tag{11}$$

から導かれることが容易にわかる。したがって両者の共存する系は

$$\mathcal{L}=\mathcal{L}_{\rm KG}+\mathcal{L}_{\rm em} \tag{12}$$

から変分原理によって導き出される方程式により支配される。そこで電磁場の方程式，すなわち Maxwell の方程式を出してみると

$$\partial_\nu F_{\mu\nu}=4\pi e j_\mu \tag{13}$$

ただし j_μ は(4)で定義された 4 次元的流れ密度である。これから ej_μ は 4

---

† 電磁場に対する変分形式については，たとえば本シリーズ 2，平川浩正：電磁気学 (1968) 参照のこと。

次元的電流密度を表わすことがわかる。したがって j_μ は確率密度よりは電流密度に近いものであることになる。しかしながらこの解釈にも少しおかしい点があることが次のようにしてわかる。たとえば第 0 成分 ej_0 を考えたとする。荷電 e が正だとすると正荷電粒子ばかりの集まりでは ej_0 はいつでも正のはずである。ところが $t=0$ でこの量が正であったとしても，運動方程式を適当な初期条件の下で解いてみると，ある時刻で ej_0 が負になったりする。これはどうしてであろうか。これはどうしても負荷電，たとえば $-e$ の粒子が創られたと考えなければ解釈ができない。実は e という粒子が存在すれば必ず $-e$ という逆符号の荷電をもった**反粒子**というものが存在すべきである，ということが相対論的量子論の帰結として証明できる。しかし 1 成分の Klein-Gordon 方程式の場合には，その証明および波動関数の解釈にはどうしても場の量子論が必要となる。これに反して次に述べる Dirac 方程式の場合には，場の量子論まで進まなくても上に述べたような結論が引き出せる。そこでいよいよ Dirac 方程式を導入することにしよう。

1-5 Dirac 方程式の導入

前節において 1 成分 Klein-Gordon 方程式に対しては確率的解釈を適用することがむずかしいことを示したが，それでは多成分ならばどうであろうか。まず多成分の場合を考えて，確率的解釈が許されるための必要条件を与えよう。

1）確率密度に対する連続の方程式が成り立つこと。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\mathrm{div}\,\boldsymbol{j}=0 \tag{1}$$

2）ρ が正定値形式となること。

このような条件を満たす方程式を見つけるために，まず波動関数 ψ を成分に分けて次の形に書いてみよう。

$$\psi=\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\\ \vdots\end{pmatrix} \tag{2}$$

正定値形式の ρ は，ψ の成分を用いて

$$\rho=\sum_{r,s} a_{rs}\psi_r{}^*\psi_s \tag{3}$$

のように書かれなければならない。ただし ρ が正定値で実数となるためには，行列 (a_{rs}) は正定値 Hermite 行列でなければならない。すると (a_{rs}) は適当なユニタリー変換によって対角化され，次の形に書かれる。

$$\rho=\sum_r a_r\psi_r'^*\psi_r' \qquad (a_r>0) \tag{4}$$

さらに $\sqrt{a_r}\psi_r'=\psi_r''$ とおけば，ρ の標準型が得られる。

$$\rho=\sum_r \psi_r''^*\psi_r'' \tag{5}$$

以下ではダッシュは省略して，初めからこの標準型を採用することにする。そして簡単のために次の記法を用いる。

$$\rho=\psi^\dagger\psi=\sum_r \psi_r^*\psi_r, \qquad \psi^\dagger=(\psi_1^*, \psi_2^*, \cdots) \tag{6}$$

すなわち ψ は n 行 1 列，$\psi^\dagger$ は 1 行 n 列の行列で ρ はその行列としての積である。

すでに前節で知ったように，ρ が ψ の成分の時間微分を含めば正定値となれない。したがって連続の方程式を満たすためには，ψ は時間について 1 階の微分方程式を満たさなければならない。ゆえに ψ の方程式の形は

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi=H\psi, \qquad \text{あるいは} \quad \left(i\frac{\partial}{\partial t}-H\right)\psi=0 \tag{7}$$

でなければならない。しかも ψ は Klein-Gordon 方程式を満たすべきであるから(7)の式から t につき 2 階の微分方程式を導き出すと

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+H^2\right)\psi=0 \tag{8}$$

これが Klein-Gordon 方程式と一致するための条件は

$$H^2=m^2-\nabla^2=m^2+\boldsymbol{p}^2 \tag{9}$$

1 成分のときにはこの式の唯一の解は $H=\pm\sqrt{m^2-\nabla^2}$ であったが，多成分の場合には他の解がある。ただしこの場合に H は多成分に対応して行列を含むことが予想される。連続方程式より H は $\boldsymbol{p}$ について線形であることが予想される。また(7)が t の微分について 1 階であるから空間微分についても 1 階であることが予想される。そこで次のようにおいてみよう。

$$H=\boldsymbol{\alpha p}+m\beta=\alpha_x p_x+\alpha_y p_y+\alpha_z p_z+m\beta \tag{10}$$

そうすると波動方程式は詳しく書くと

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi_r=\sum_s\left(\boldsymbol{\alpha}_{rs}\frac{1}{i}\nabla+m\beta_{rs}\right)\psi_s \tag{11}$$

これを簡単のために次のように書くことにする。

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi=(\boldsymbol{\alpha p}+m\beta)\psi=\left(\frac{1}{i}\boldsymbol{\alpha}\nabla+m\beta\right)\psi \tag{12}$$

次に $\boldsymbol{\alpha}$ と β とを決める条件を与えてみよう。

1) $\int\psi^\dagger\psi\, d^3x=1,$ あるいは H が Hermite 演算子 (13)

2) $H^2=\boldsymbol{p}^2+m^2$ (14)

まず 1) より $\boldsymbol{\alpha}$ と β とは Hermite 行列であることがわかる。また 2) より

$$\alpha_x{}^2=\alpha_y{}^2=\alpha_z{}^2=\beta^2=\mathbf{1} \qquad (\mathbf{1}\text{ は単位行列}) \tag{15}$$

および

$$\alpha_x\alpha_y+\alpha_y\alpha_x=0,\ \cdots,\qquad \alpha_x\beta+\beta\alpha_x=0,\ \cdots \tag{16}$$

あるいは全体をまとめて

$$\alpha_k\alpha_l+\alpha_l\alpha_k=2\delta_{kl}\mathbf{1},\quad \alpha_k\beta+\beta\alpha_k=0,\quad \beta^2=\mathbf{1}\qquad (k,\, l=1,\, 2,\, 3) \tag{17}$$

次に連続の方程式が成り立っているかどうかを調べてみる。それには

$$\boldsymbol{j}=\psi^\dagger\boldsymbol{\alpha}\psi,\qquad \rho=\psi^\dagger\psi \tag{18}$$

と選べばよいことがわかる。このことを確かめるために方程式(11)およびその複素共役の方程式を書き下してみると

$$i\frac{\partial\psi_r}{\partial t}=\left(\boldsymbol{\alpha}_{rs}\frac{1}{i}\nabla+m\beta_{rs}\right)\psi_s \tag{11}$$

$$-i\frac{\partial\psi_r{}^*}{\partial t}=\left(\boldsymbol{\alpha}_{rs}{}^*\frac{-1}{i}\nabla+m\beta_{rs}{}^*\right)\psi_s{}^* \tag{19}$$

ところで $\boldsymbol{\alpha}$ と β とが Hermite 行列であることを用いると，方程式(19)は次の形に書くことができる。

$$i\frac{\partial\psi_r{}^*}{\partial t}=\frac{1}{i}\nabla\psi_s{}^*\boldsymbol{\alpha}_{sr}-m\psi_s{}^*\beta_{sr} \tag{20}$$

ただし以上の方程式では添字 s に関する和は陽に書いていないが，和をとるということを約束しておく。さて以上の方程式を組み合わせると

$$\begin{aligned}
i\frac{\partial\rho}{\partial t}&=i\frac{\partial}{\partial t}(\psi_r{}^*\psi_r)\\
&=i\frac{\partial\psi_r{}^*}{\partial t}\psi_r+i\psi_r{}^*\frac{\partial\psi_r}{\partial t}\\
&=\left(\frac{1}{i}\nabla\psi_s{}^*\boldsymbol{\alpha}_{sr}\psi_r-m\psi_s{}^*\beta_{sr}\psi_r\right)+\left(\psi_r{}^*\boldsymbol{\alpha}_{rs}\frac{1}{i}\nabla\psi_s+m\psi_r{}^*\beta_{rs}\psi_s\right)\\
&=-i\nabla\psi^\dagger\cdot\boldsymbol{\alpha}\psi-i\psi^\dagger\boldsymbol{\alpha}\nabla\psi\\
&=-i\,\mathrm{div}(\psi^\dagger\boldsymbol{\alpha}\psi)\\
&=-i\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{j}
\end{aligned}$$

こうして連続の方程式が成り立つことが証明された。

これで確率的解釈を許す相対論的波動方程式が見つかったことになる。この方程式を **Dirac 方程式**とよぶ。

Dirac 行列の Pauli 表現 次にやるべきことは，$\boldsymbol{\alpha}$ や β の具体的な表現を求めること，特にその次元を決めることである。ここでは表現を求める一般論は展開せず，最も簡単な表現の具体例のみをあげておくことにしよう。

まず交換関係(17)を満たすような表現は最低 4 次元でなければならないことが知られている。したがって Dirac の波動関数 ψ は少なくとも 4 成分をもつ。我々はこの 4 成分のときの表現のみを Dirac 方程式とよぶことにする。一つの具体的な表現を与えるために Pauli 行列を導入する。

$$\sigma_1=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\qquad \sigma_2=\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix},\qquad \sigma_3=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\qquad I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \tag{21}$$

この行列の間には次の交換関係が成立する。

$$\begin{aligned}\sigma_1\sigma_2&=-\sigma_2\sigma_1=i\sigma_3\\ \sigma_2\sigma_3&=-\sigma_3\sigma_2=i\sigma_1\\ \sigma_3\sigma_1&=-\sigma_1\sigma_3=i\sigma_2\\ \sigma_1{}^2&=\sigma_2{}^2=\sigma_3{}^2=I\end{aligned} \tag{22}$$

そうすると交換関係(17)を満たすような一つの表現は次のように与えられる。これを **Pauli の表現**とよぶことがある。

$$\alpha_k=\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \sigma_k\\ \sigma_k & \mathbf{0}\end{pmatrix},\qquad \beta=\begin{pmatrix}I & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & -I\end{pmatrix} \tag{23}$$

ただし，α_k も β も 4 行 4 列の行列で 2 行 2 列ずつを一つの文字で表わしてあり，特に $\mathbf{0}$ は 2 行 2 列の零行列を表わしているものとする。

もし S を任意のユニタリー行列とすれば，明らかに

$$\alpha_k'=S\alpha_kS^{-1},\qquad \beta'=S\beta S^{-1} \tag{24}$$

も Pauli 表現と同値な他の表現を与える。4 次元表現に限って考えれば，すべての表現は，Pauli 表現から(24)の変換によって得られる。

最後に重要なことは，Dirac 方程式を使っていろいろな物理量，特に観測可能量を計算するときに，最後の結果は表現の選び方によらないということである。もちろん実際の計算をするときには，場合に応じて適当な表現をとった方が簡単になることがある。またここで導入した Dirac 方程式はスピン 1/2 の粒子の記述にしか使えないということを注意しておく。この本では Dirac 方程式はもっぱら電子を記述するのに用いられる。質

量 m が 0 になるといろいろと様子が変わってくる。それについては次の節で述べることにする。

1-6 Weyl 方程式

前節で導入した Dirac 方程式において質量 m が 0 のときには特殊事情が生ずる。すなわちこのときには Dirac のハミルトニアンは

$$H=\boldsymbol{\alpha p} \tag{1}$$

そしてこの Dirac 方程式の解が質量 0 の Klein-Gordon 方程式を満たすための条件は

$$H^2=\boldsymbol{p}^2 \tag{2}$$

したがって行列 $\boldsymbol{\alpha}$ の満たすべき交換関係は

$$\alpha_k\alpha_l+\alpha_l\alpha_k=2\delta_{kl}\mathbf{1} \qquad (k,\ l=1,\ 2,\ 3) \tag{3}$$

となり，行列 β は現われない。この場合に交換関係(3)は前節の(17)よりもずっと制限が弱いから，2 次元の表現が見つかる。すなわち 4 次元まで考えるのは β の存在のためであるといってよい。一つの解は†

$$\alpha_k=\sigma_k \qquad (k=1,\ 2,\ 3)$$

したがってこの表現をとれば，Dirac 方程式は次の形に書けることになる。

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi=\boldsymbol{\sigma p}\psi \tag{4}$$ ††

この 2 成分の方程式を **Weyl(ワイル)方程式**とよぶ。この方程式は昔から知られていたが，この方程式は必然的にパリティの保存を破ってしまうので，パリティの保存が信じられていた時代には人々の注意をひかなかった。しかし 1956 年に Lee(リー)と Yang(ヤン)とが提唱した弱い相互作用における**パリティの非保存**が実験的に検証されると同時に脚光を浴び，今日では，質量 0 のニュートリノが Weyl 方程式に従うと信じられている。またそれと同時に 2 成分ニュートリノの理論が詳しく研究された。この本ではそのようなことについてはふれる余裕がないので Weyl 方程式という名前だけを出しておく。

---

† もう一つの解は $\alpha_k=-\sigma_k$ であり，この符号は Weyl 粒子の helicity で決められる。

†† あるいは $i\frac{\partial}{\partial t}\psi=-\boldsymbol{\sigma p}\psi$.

1-7 Dirac 方程式の相対論的共変性

Dirac 方程式は波動関数の確率的解釈を許す相対論的方程式として求められたが，一般の Lorentz 変換に対してどのように変換されるであろうか。この変換性がはっきりとわからないと種々の相互作用が Lorentz 変換に対して不変であるかどうかの判断が下せないのである。そこでこの変換性について調べてみることにする。

まず波動関数の変換性を一般的に調べる前に，非相対論的量子力学におけるスピン波動関数について考えてみる。ある電子のスピンが z 方向を向いているとすると，電子の波動関数は σ_z の固有状態で，

$$\sigma_z\psi=\psi, \qquad \text{ただし} \quad \sigma_z=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \tag{1}$$

したがって波動関数 ψ の形は次の形をしていなければならない。

$$\psi=\begin{pmatrix}\psi_1\\ 0\end{pmatrix} \tag{2}$$

ところが異なる座標系で見れば，z と z' とは平行でないとしたときに

$$\sigma_{z'}\psi\neq\psi \tag{3}$$

したがってこの系では，ψ の形は

$$\psi'=\begin{pmatrix}\psi_1'\\ \psi_2'\neq 0\end{pmatrix} \tag{4}$$

このことから明らかなことは，ψ の各成分は回転に対して変換を受けるということである。Dirac 方程式に対しても同様な事情が存在する。以下でこの変換法則を一般的に求めてみよう。

Dirac の波動関数の変換性 Dirac の波動関数の 4 成分が二つの異なる慣性系において

$$\psi=\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\\ \psi_3\\ \psi_4\end{pmatrix} \ \text{一つの系}, \qquad \psi'=\begin{pmatrix}\psi_1'\\ \psi_2'\\ \psi_3'\\ \psi_4'\end{pmatrix} \ \text{他の系} \tag{5}$$

のように表わされたとする。この変換は 1 次変換である。そして任意の **Lorentz 変換**に対して，それに対応する 1 次変換 S が存在し，ψ の変換は

$$\psi_r'=\sum_s S_{rs}\psi_s, \qquad \text{あるいは} \quad \psi'=S\psi \tag{6}$$

のように表わされる。換言すれば行列 S は与えられた Lorentz 変換の一つの**表現**であるべきである。これから証明することは，S を適当に選べば

二つの異なる慣性系における Dirac 方程式の形が完全に同じになることである。またこの選び方が，ψ の Lorentz 変換に対する変換性を決定するといえる。

まず Dirac 方程式

$$\left(-i\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{\alpha}\frac{1}{i}\nabla+m\beta\right)\psi=0 \tag{7}$$

に左から β を乗ずると

$$\left(\beta\frac{\partial}{\partial(it)}+\frac{\beta\boldsymbol{\alpha}}{i}\nabla+m\right)\psi=0 \tag{8}$$

そこで γ 行列を次のように定義する。

$$\frac{\beta\alpha_k}{i}=\gamma_k \quad (k=1,\,2,\,3), \qquad \beta=\gamma_4 \tag{9}$$

こうすれば四つの γ 行列はすべて Hermite 行列であり，かつその間の交換関係は 1-5 の(17)から次のように求められる。

$$\gamma_\mu\gamma_\nu+\gamma_\nu\gamma_\mu=2\delta_{\mu\nu}\cdot 1 \tag{10}$$

これは(17)のように $\boldsymbol{\alpha}$ と β とを区別しないでよいので，ずっと見通しのよい統一的な形になっている。もちろんこの交換関係から逆に 1-5 の(17)で与えられる交換関係を再現することもできる。

これらの γ 行列を用いると，(8)は次のようにずっとすっきりした形に書ける。

$$\left(\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu}+m\right)\psi=0 \tag{11}$$

さて我々が証明すべきことは

$$\left(\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu}+m\right)_{rs}\psi_s=0 \tag{12}$$

から出発して

$$\left(\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu'}+m\right)_{rs}\psi_s'=0 \tag{13}$$

が成り立つように S が決められるということである。ただし x_μ' と x_μ とは次のような Lorentz 変換で結ばれているとする。

$$x_\mu'=\sum_\nu a_{\mu\nu}x_\nu, \qquad \sum_\mu a_{\mu\rho}a_{\mu\sigma}=\delta_{\rho\sigma}$$

$$x_\nu=\sum_\mu a_{\mu\nu}x_\mu', \qquad \sum_\rho a_{\rho\mu}a_{\rho\nu}=\delta_{\mu\nu}$$

ここに a_{k4} と a_{4k} とは純虚数であり，$(a_{\mu\nu})$ は直交行列である。そこで(13)に(6)を代入すると

$$\sum_\mu \sum_\nu \gamma_\mu S a_{\mu\nu} \frac{\partial \psi}{\partial x_\nu} + mS\psi = 0 \tag{14}$$

ただし

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu{}'} = \sum_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial x_\mu{}'} \frac{\partial}{\partial x_\nu} = \sum_\nu a_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu}$$

次に(14)に左から S^{-1} を乗じると

$$\sum_\mu \sum_\nu (S^{-1}\gamma_\mu S) a_{\mu\nu} \frac{\partial \psi}{\partial x_\nu} + m\psi = 0 \tag{15}$$

そこでこの方程式を(12)と比較して，両者が同値であるための条件は

$$\sum_\mu (S^{-1}\gamma_\mu S) a_{\mu\nu} = \gamma_\nu, \quad \text{あるいは} \quad S^{-1}\gamma_\mu S = \sum_\nu a_{\mu\nu}\gamma_\nu \tag{16}$$

これが実は行列 S を決定する方程式である。そこで次に問題となることは，任意の Lorentz 変換 $(a_{\mu\nu})$ に対して(16)を満たす S の存在を証明することである。

その前にまず S が Lorentz 変換の一つの表現であることを証明しておこう。そのために S と $(a_{\mu\nu})$ との関係が(16)で表わされるのと同様に

$$T^{-1}\gamma_\mu T = \sum_\nu b_{\mu\nu}\gamma_\nu \tag{17}$$

であるとする。すると

$$\begin{aligned} T^{-1}S^{-1}\gamma_\mu ST &= \sum_\nu a_{\mu\nu} T^{-1}\gamma_\nu T \\ &= \sum_\nu \sum_\sigma a_{\mu\nu} b_{\nu\sigma}\gamma_\sigma \end{aligned}$$

すなわち

$$(ST)^{-1}\gamma_\mu (ST) = \sum_\sigma \left(\sum_\nu a_{\mu\nu} b_{\nu\sigma}\right)\gamma_\sigma \tag{18}$$

であるから S と T とがそれぞれ a と b とに対応すれば，ST は ab という行列積に対応することを意味し，S が $(a_{\mu\nu})$ という Lorentz 変換の一つの表現を与えていることになる。さて Dirac 方程式(12)の複素共役をとってみよう。これは S に対するもう一つの条件を導き出すためである。

$$\left\{(\gamma_\mu)_{rs}{}^* \frac{\partial}{\partial x_\mu{}^*} + m\delta_{rs}\right\}\psi_s{}^* = 0 \tag{19}$$

さて γ_μ は全部 Hermite 行列であり，$x_\mu{}^* = x_\mu$ $(\mu = 1, 2, 3)$，$= -x_\mu$ $(\mu = 4)$ であるから

$$\sum_{\mu=1}^{3} \frac{\partial \psi_s{}^*}{\partial x_\mu}(\gamma_\mu)_{sr} - \frac{\partial \psi_s{}^*}{\partial x_4}(\gamma_4)_{sr} + m\psi_r{}^* = 0 \tag{20}$$

そこで γ_4 を右から乗じて

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma_4 \tag{21}$$

とおくと，γ_4 は γ_1，γ_2，γ_3 と反可換であることから

$$-\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x_\mu}\gamma_\mu+m\bar{\psi}=0, \qquad \text{あるいは} \quad \frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x_\mu}\gamma_\mu-m\bar{\psi}=0 \tag{22}$$

この方程式も ψ の方程式と同じ意味で共変的であることは

$$\bar{\psi}'=\bar{\psi}S^{-1} \tag{23}$$

としてみると証明できる†。ただし S は ψ のときの S と同じものである。ところが ψ の変換と $\bar{\psi}$ の変換，すなわち

$$\psi'=S\psi, \qquad \bar{\psi}'=\bar{\psi}S^{-1}$$

は互いに独立な変換ではないので S に対する新しい制限が得られる。すなわち第一の変換の Hermite 共役をとってみると

$$\psi'^\dagger=\psi^\dagger S^\dagger \qquad (\dagger\text{: Hermite 共役})$$

したがってこの式に右から γ_4 を乗じると

$$\begin{aligned}\bar{\psi}'&=\psi^\dagger S^\dagger\gamma_4\\&=\bar{\psi}\gamma_4S^\dagger\gamma_4\end{aligned}$$

この結果を第二の変換と比べると

$$\gamma_4S^\dagger\gamma_4=S^{-1}, \qquad \text{あるいは} \quad S^\dagger\gamma_4=\gamma_4S^{-1} \tag{24}$$

これは S に対する第二の条件となる。ここで注意すべきことは，S は必ずしもユニタリー行列とはならないということである。つまり $S^\dagger$ と S^{-1} とは必ずしも等しくならない。このことは数学的にいうと，Lorentz 変換群はコンパクトな群ではないので，有限次元(ここでは 4 次元)の**ユニタリー表現**が存在しないという事実に対応している。さていままでに出た条件をまとめてみると，Dirac 方程式の共変性が成り立つための条件は次の方程式を満たす S が存在することである。

1)
$$S^{-1}\gamma_\mu S=\sum_\nu a_{\mu\nu}\gamma_\nu \tag{16}$$

2)
$$S^\dagger\gamma_4=\gamma_4S^{-1} \tag{24}$$

このような S の存在を証明する前に，もし S が存在するとしたら ψ と $\bar{\psi}$ とから作られる双 1 次形式がどのような変換性を示すかを調べてみよう。

双 1 次形式の変換性

1) $\bar{\psi}'\psi'=\bar{\psi}S^{-1}\cdot S\psi=\bar{\psi}\psi$　　これは Lorentz 不変のスカラーである。

2) $i\bar{\psi}'\gamma_\mu\psi'=i\bar{\psi}S^{-1}\gamma_\mu S\psi=\sum_\nu a_{\mu\nu}i\bar{\psi}\gamma_\nu\psi$　　これはベクトルである。

同様にして変換性を調べてゆくと

---

† 実は $\bar{\psi}'=\bar{\psi}T^{-1}$ とおいて出発すると，T が S と同じ方程式に従うことが共変性の条件となる。したがって $T=S$ と選べる。

3) $M_{\mu\nu}=-M_{\nu\mu}=i\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_\nu\psi$ ($\mu\neq\nu$) これは反対称テンソルである。

4) $i\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\psi$ (μ, ν, ρ はお互いに異なる) これは軸性ベクトルである。またこのような双 1 次形式は $i\bar{\psi}\gamma_5\gamma_\lambda\psi$ のように書くことができる。ただし γ_5 は

$$\gamma_5=\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4, \qquad \gamma_5{}^2=1 \tag{25}$$

で定義される Hermite 行列で，$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ と反可換である。つまり

$$\gamma_5\gamma_\lambda+\gamma_\lambda\gamma_5=0 \qquad (\lambda=1, 2, 3, 4) \tag{26}$$

5) $i\bar{\psi}\gamma_5\psi$ これは擬スカラーである。特にこの量は一般の Lorentz 変換に対し

$$i\bar{\psi}'\gamma_5\psi'=i\bar{\psi}\gamma_5\psi\cdot\det(a_{\mu\nu}) \tag{27}$$

という変換性を示すことが容易に示される。

さて j_μ を次式で定義する。

$$j_\mu=i\bar{\psi}\gamma_\mu\psi \tag{28}$$

そうすると

$$j_k=i\psi^\dagger\beta\frac{\beta\alpha_k}{i}\psi=\psi^\dagger\alpha_k\psi$$

$$j_4=i\bar{\psi}\beta\psi=i\psi^\dagger\psi$$

明らかにこの流れ密度は 1-5 の(18)で導入された 4 次元的流れ密度と一致し，それは 4 次元ベクトルの変換性を示す。したがって連続の方程式は Lorentz 不変な形

$$\frac{\partial j_\mu}{\partial x_\mu}=0 \tag{29}$$

のように書くことができる。また確率密度 $\psi^\dagger\psi$ は Lorentz 変換に対してはスカラーではなく，ベクトルの第四成分の変換を示すので，次の規格化積分は Lorentz 不変な内容をもっている。

$$\int\psi^\dagger\psi d^3x=1 \tag{30}$$

その理由は静止系から運動系への Lorentz 変換に対して v/c を β と書くと

$$d^3x'=d^3x\sqrt{1-\beta^2} \qquad \text{Lorentz 収縮} \tag{31}$$

$$(\psi^\dagger\psi)'=\frac{\psi^\dagger\psi}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \text{第四成分の変換} \tag{32}$$

が成り立つからである。この関係は荷電密度と総荷電との関係と本質的に同じである。

行列 S の存在証明 いよいよ S の存在の証明に移ろう。まず無限小変換を考える。

$$x_\mu'=x_\mu+\sum_\nu \varepsilon_{\mu\nu}x_\nu \qquad (\varepsilon_{\mu\nu}=-\varepsilon_{\mu\nu} \text{ は無限小}) \tag{33}$$

ここで μ, ν のいずれかが 4 に等しいときに $\varepsilon_{\mu\nu}$ は純虚数とすれば，上の変換は無限小 Lorentz 変換を表わすことになる。これに対応する無限小変換 S を次の形に書くとする。

$$S=\mathbf{1}+\frac{1}{2}\sum_\mu\sum_\nu \varepsilon_{\mu\nu}T_{\mu\nu}, \qquad T_{\mu\nu}=-T_{\nu\mu} \tag{34}$$

ただし $T_{\mu\nu}$ は γ 行列を組み合わせて表現できる 4 次元の行列である。上の式を S の満たす方程式(16)に代入し，ε につき 1 次の項をとり出すと

$$\gamma_\mu\frac{1}{2}\sum_\lambda\sum_\nu \varepsilon_{\lambda\nu}T_{\lambda\nu}-\frac{1}{2}\sum_\lambda\sum_\nu \varepsilon_{\lambda\nu}T_{\lambda\nu}\gamma_\mu=\sum_\nu \varepsilon_{\mu\nu}\gamma_\nu \tag{35}$$

ところが ε の反対称性を用いると右辺は次のように書ける。

$$\frac{1}{2}\sum_\lambda\sum_\nu \varepsilon_{\lambda\nu}(\delta_{\lambda\mu}\gamma_\nu-\delta_{\mu\nu}\gamma_\lambda) \tag{36}$$

したがって(35)の左辺と(36)とを比較し，$\varepsilon_{\lambda\nu}$ の反対称化された係数を等しいとおくと

$$\gamma_\mu T_{\lambda\nu}-T_{\lambda\nu}\gamma_\mu=\delta_{\lambda\mu}\gamma_\nu-\delta_{\nu\mu}\gamma_\lambda \tag{37}$$

この方程式の解は直ちに次のように求まる。

$$T_{\lambda\nu}=\frac{1}{4}(\gamma_\lambda\gamma_\nu-\gamma_\nu\gamma_\lambda)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\gamma_\lambda\gamma_\nu & (\lambda\neq\nu)\\ 0 & (\lambda=\nu)\end{cases} \tag{38}$$

次にこの解が方程式(24)を満たしているかどうかを調べなければならない。無限小変換(34)に対して，(24)の式は次のように書ける。

$$\sum_\mu\sum_\nu \varepsilon^*_{\mu\nu}T^\dagger_{\mu\nu}=-\sum_\mu\sum_\nu \gamma_4\varepsilon_{\mu\nu}T_{\mu\nu}\gamma_4 \tag{39}$$

この式が成り立っていることは，ε_{4k} が純虚数であり，ε_{ik} が実数であることを用いると直ちにわかる。ただし i と k は 1, 2, 3 のいずれかに等しいとする。すなわち，上の式を場合ごとに分けると

$$\varepsilon_{ik}T^\dagger_{ik}=-\gamma_4\varepsilon_{ik}T_{ik}\gamma_4$$
$$\varepsilon_{4k}T^\dagger_{4k}=\gamma_4\varepsilon_{4k}T_{4k}\gamma_4$$

あるいは

$$T^\dagger_{ik}=-\gamma_4T_{ik}\gamma_4, \qquad T^\dagger_{4k}=\gamma_4T_{4k}\gamma_4$$

この式はいずれも(38)によって満たされていることが容易にわかる。したがって無限小 Lorentz 変換に対しては対応する行列 S の存在が証明されたことになる。また無限小 Lorentz 変換から生成されるいわゆる **proper な Lorentz 変換**に対しては S が存在することも同時に結論される。また

定義から明らかなように

$$\mathrm{Tr}(T_{\mu\nu})=0 \tag{40}$$

ゆえに無限小 Lorentz 変換に対して，したがって proper な Lorentz 変換に対して

$$\det S=1 \tag{41}$$

また proper な Lorentz 変換に対しては

$$\gamma_5 T_{\lambda\mu}-T_{\lambda\mu}\gamma_5=0$$

より直ちに

$$S^{-1}\gamma_5 S=\gamma_5$$

が結論され，$i\bar{\psi}\gamma_5\psi$ がこのような Lorentz 変換に対して不変であることがわかる。

上の議論では proper な変換のみを考えたが，**improper な変換**† に対してはどうであろうか。ここで**空間反転**について考えてみよう。**時間反転**については，問題が複雑なので付録で議論することにする。

空間反転は Lorentz 変換の一つで，次式で定義される。

$$x_k'=-x_k \quad (k=1,\,2,\,3), \qquad x_4'=x_4 \tag{42}$$

これに対応する S は次の方程式を満たさなければならない。

$$\begin{aligned} \gamma_k S&=-S\gamma_k \qquad (k=1,\,2,\,3)\\ \gamma_4 S&=S\gamma_4\\ S^\dagger\gamma_4&=\gamma_4 S^{-1} \end{aligned} \tag{43}$$

この三つの方程式を同時に満たす解は

$$S=\gamma_4 \tag{44}$$

したがって空間反転に対しても Dirac 方程式の形は変わらないことが証明された。

行列 S の例　上述の S の存在証明では，具体的には無限小変換しか考えていなかった。この形から有限変換を求めるには，無限小変換を積分しなければならない。そこで典型的な例についてこの積分を実行してみよう。

例 1．ab 平面内における回転(空間回転)　ab 平面内における回転に対する無限小変換は次のパラメーターで与えられる。

$$\varepsilon_{ab}=-\varepsilon_{ba}\neq 0, \qquad \text{他の } \varepsilon=0 \tag{45}$$

このときに $\varepsilon_{ab}=d\omega$ とおけば，

† proper でない変換を improper とよぶ。

$$\begin{aligned} x_a' &= x_a + d\omega x_b \\ x_b' &= x_b - d\omega x_a \end{aligned} \tag{46}$$

すなわち，行列を用いて表わせば

$$\begin{pmatrix} x_a' \\ x_b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & d\omega \\ -d\omega & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_a \\ x_b \end{pmatrix} = \left\{ \mathbf{1} + d\omega \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} x_a \\ x_b \end{pmatrix} \tag{47}$$

有限な角度 ω に対応する回転の行列は

$$L = \left\{ \mathbf{1} + d\omega \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}^{\omega/d\omega} \tag{48}$$

この L は ω の関数であるから $L(\omega)$ と書くと，上の定義から

$$L(\omega + d\omega) = L(\omega) \left\{ 1 + d\omega \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

あるいは

$$\frac{dL(\omega)}{d\omega} = L(\omega) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{49}$$

この方程式の解は，公式

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^2 = -\mathbf{1}$$

を用いると直ちに次の形に求められる。

$$L(\omega) = \mathbf{1} \cdot \cos\omega + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \sin\omega = \begin{pmatrix} \cos\omega & \sin\omega \\ -\sin\omega & \cos\omega \end{pmatrix} \tag{50}$$

ただし境界条件として，$L(0) = \mathbf{1}$ を用いている。すなわち有限角に対する回転は

$$\begin{pmatrix} x_a' \\ x_b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\omega & \sin\omega \\ -\sin\omega & \cos\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_a \\ x_b \end{pmatrix} \tag{51}$$

次に上の Lorentz 変換に対応する S を作ってみよう。上と同様にして

$$\begin{aligned} S(\omega + d\omega) &= S(\omega) \left\{ \mathbf{1} + \frac{1}{2} \varepsilon_{ab} T_{ab} + \frac{1}{2} \varepsilon_{ba} T_{ba} \right\} \\ &= S(\omega) \left\{ \mathbf{1} + \frac{1}{2} d\omega \gamma_a \gamma_b \right\} \end{aligned} \tag{52}$$

あるいは

$$\frac{dS(\omega)}{d\omega} = S(\omega) \frac{1}{2} \gamma_a \gamma_b \tag{53}$$

この方程式の解は，$(\gamma_a \gamma_b)^2 = -\mathbf{1}$ に注意すれば上と同様に次のように求められる。

$$S(\omega) = \mathbf{1} \cdot \cos\frac{\omega}{2} + \gamma_a \gamma_b \cdot \sin\frac{\omega}{2} \tag{54}$$

以上で求めたのは純粋な空間回転，すなわち $a, b=1, 2, 3$ の場合に限る。

例 2. 特殊 Lorentz 変換 上の例で a, b の一つを 4 とすると，すなわち時間と空間の座標を混ぜる特殊 Lorentz 変換を考えると，少し事情が変わってくる。まず

$$\varepsilon_{ab}=-\varepsilon_{ba}=i\,d\chi \quad (\text{純虚数}) \tag{55}$$

このときに有限な χ に対する Lorentz 変換は次の微分方程式を満たす。

$$\frac{dL(\chi)}{d\chi}=iL(\chi)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{56}$$

この方程式の解は直ちに次の形に求められる。

$$\begin{aligned} L(\chi)&=\mathbf{1}\cdot\cosh\chi+\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}\sinh\chi \\ &=\begin{pmatrix} \cosh\chi & i\sinh\chi \\ -i\sinh\chi & \cosh\chi \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{57}$$

たとえば $x_a=x,\ x_b=x_4$ とすると，上の変換は

$$\begin{aligned} x'&=x\cosh\chi-t\sinh\chi \\ t'&=-x\sinh\chi+t\cosh\chi \end{aligned} \tag{58}$$

そこで $\beta=\tanh\chi$ とおけば，次のような見なれた形になる。

$$x'=\frac{x-\beta t}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad t'=\frac{t-\beta x}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{59}$$

ただし我々は自然単位を使っているので光速度 c は上の式に現われない。これは**特殊 Lorentz 変換**である。いま χ_1 と χ_2 で与えられるような二つの特殊 Lorentz 変換の積を作ると，その結果は $\chi_1+\chi_2$ で与えられる特殊 Lorentz 変換になる。χ に対応する速度 β で表わせば，$\chi_1,\ \chi_2,\ \chi_1+\chi_2$ に対応する β の関係から速度の加法定理を導くことができる。すなわち，これらを $\beta_1,\ \beta_2,\ \beta$ とすると

$$\tanh(\chi_1+\chi_2)=\frac{\tanh\chi_1+\tanh\chi_2}{1+\tanh\chi_1\cdot\tanh\chi_2}$$

という公式より，速度の加法定理

$$\beta=\frac{\beta_1+\beta_2}{1+\beta_1\beta_2} \tag{60}$$

が得られる。

次に上の特殊 Lorentz 変換に対応する S を求めてみよう。まず方程式は

$$\frac{dS(\chi)}{d\chi}=iS(\chi)\frac{1}{2}\gamma_a\gamma_b \tag{61}$$

その解は

$$S(\chi)=\exp\left(\frac{i}{2}\chi\gamma_a\gamma_b\right)$$
$$=\mathbf{1}\cdot\cosh\frac{\chi}{2}+i\gamma_a\gamma_b\sinh\frac{\chi}{2} \tag{62}$$

たとえば上の例の場合には

$$S(\chi)=\mathbf{1}\cdot\cosh\frac{\chi}{2}+i\gamma_1\gamma_4\sinh\frac{\chi}{2} \tag{63}$$

1-8 Dirac 行列の性質

前節において γ 行列を導入したが，その積から作られる行列には次の 5 種類があることを述べた。

$\mathbf{1}$		スカラー
γ_μ		ベクトル
$\gamma_\mu\gamma_\nu$	$(\mu\neq\nu)$	反対称テンソル
$\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\sigma$	$(\mu\neq\nu\neq\sigma\neq\mu)$	軸性ベクトル
$\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\sigma\gamma_\rho$	(μ, ν, σ, ρ は全部異なる)	擬スカラー

これらの行列にはいろいろな書き方があるが，第三のテンソルは

$$\sigma_{\mu\nu}=\frac{1}{2i}(\gamma_\mu\gamma_\nu-\gamma_\nu\gamma_\mu) \tag{1}$$

を用いると，$\mu=\nu$ のときには自動的に 0 になり，しかも Hermite 行列なので便利である。第四，第五の行列は γ_5 を用いるとそれぞれ $\gamma_5\gamma_\mu$, γ_5 と書ける。たとえば第四のものについては

$$\gamma_1\gamma_2\gamma_3=\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4\gamma_4=\gamma_5\gamma_4$$

第五のものについては，たとえば

$$\gamma_2\gamma_3\gamma_4\gamma_1=-\gamma_2\gamma_3\gamma_1\gamma_4=\gamma_2\gamma_1\gamma_3\gamma_4=-\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4=-\gamma_5$$

またこれらの 5 種類の行列が互いに 1 次独立であることは

$$\bar{\psi}O\psi$$

という形の双 1 次形式の Lorentz 変換に対する変換性が異なることから明らかである。またこれらの 5 種類の行列の数は

$$1+4+6+4+1=16=4\times4$$

となり，1 次独立な 4 次元行列の数と一致している。

次に行列の **trace** について述べよう。実際の計算では しばしば多くの γ 行列の積の trace を計算しなければならなくなる。この理由は後に明ら

かにされるが，ここではその定義とか性質について述べよう。

n 次元の正方行列 $A=(a_{ij})$ の trace は次式で定義される。

$$\mathrm{Tr}\,A=\sum_{i=1}^{n}a_{ii} \tag{2}$$

この trace の基本的性質は，定義から直ちに証明できるように

I） $\mathrm{Tr}(\lambda A)=\lambda\,\mathrm{Tr}\,A$,　$\mathrm{Tr}(A+B)=\mathrm{Tr}\,A+\mathrm{Tr}\,B$　**線形性**　(3)

ただし λ は c 数である。

II） $\mathrm{Tr}(AB)=\mathrm{Tr}(BA)$　**可換性**　(4)

さて II）より直ちに

$$\mathrm{Tr}(S^{-1}AS)=\mathrm{Tr}(S^{-1}\cdot AS)=\mathrm{Tr}(AS\cdot S^{-1})=\mathrm{Tr}\,A \tag{5}$$

次に Dirac 行列（γ 行列から生成される行列）の trace を考えよう。

1） $\mathrm{Tr}(1)=4$　(6)

次に $\gamma_\mu\gamma_5=-\gamma_5\gamma_\mu$ より

2） $\mathrm{Tr}(\gamma_\mu)=\mathrm{Tr}(\gamma_\mu\gamma_5\gamma_5)=\mathrm{Tr}(\gamma_5\gamma_\mu\gamma_5)=-\mathrm{Tr}(\gamma_\mu)$

ゆえに $\mathrm{Tr}(\gamma_\mu)=0$，同様にして $\mathrm{Tr}(\gamma_5)=0$.

3） $\gamma_\mu\gamma_\nu+\gamma_\nu\gamma_\mu=2\delta_{\mu\nu}\mathbf{1}$ の trace をとると

$$\mathrm{Tr}(\gamma_\mu\gamma_\nu)=\delta_{\mu\nu}\,\mathrm{Tr}\,\mathbf{1}=4\delta_{\mu\nu} \tag{7}$$

4） 同様にして　$\mathrm{Tr}(\gamma_\mu\gamma_5)=0$　(8)

ゆえに 16 ある Dirac 行列で trace が 0 にならないのは単位行列だけである。このことを使って次式が証明できる。

$$\mathrm{Tr}(\gamma_\alpha\gamma_\beta\cdots\gamma_\rho\gamma_\sigma)=\mathrm{Tr}(\gamma_\sigma\gamma_\rho\cdots\gamma_\beta\gamma_\alpha) \tag{9}$$

以上では γ 行列の表現によらない話をしてきたが，実際の計算特に非相対論的近似をする場合などには表現を決めておいた方が便利なことが多い。そこで 1-5 で述べた Pauli の表現についてもう少し詳しく説明する。

$\boldsymbol{\sigma}$ 行列と $\boldsymbol{\rho}$ 行列　まず 2 次元の Pauli 行列を 4 次元に拡張し，同じ記号を用いる。

$$\sigma_1=\begin{pmatrix}\sigma_1 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \sigma_1\end{pmatrix},\quad \sigma_2=\begin{pmatrix}\sigma_2 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \sigma_2\end{pmatrix},\quad \sigma_3=\begin{pmatrix}\sigma_3 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \sigma_3\end{pmatrix} \tag{10}$$

この 4 次元の σ 行列は 2 次元のときと同じ交換関係を満たす。

$$\sigma_1\sigma_2=-\sigma_2\sigma_1=i\sigma_3,\quad \sigma_2\sigma_3=-\sigma_3\sigma_2=i\sigma_1,\quad \sigma_3\sigma_1=-\sigma_1\sigma_3=i\sigma_2 \tag{11}$$

$$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma_3^2=\mathbf{1}\quad (\text{4 次元の単位行列}) \tag{12}$$

次に ρ 行列とよばれる行列を導入する。I と $\mathbf{0}$ とをそれぞれ 2 次元のときの単位行列と零行列としたときに ρ 行列は次式で定義される。

$$\rho_1=\begin{pmatrix}0 & I\\ I & 0\end{pmatrix},\qquad \rho_2=\begin{pmatrix}0 & -iI\\ iI & 0\end{pmatrix},\qquad \rho_3=\begin{pmatrix}I & 0\\ 0 & -I\end{pmatrix} \tag{13}$$

この ρ 行列は σ 行列と全く同じ交換関係を満たす。

$$\rho_1\rho_2=-\rho_2\rho_1=i\rho_3,\quad \rho_2\rho_3=-\rho_3\rho_2=i\rho_1,\quad \rho_3\rho_1=-\rho_1\rho_3=i\rho_2 \tag{14}$$

$$\rho_1{}^2=\rho_2{}^2=\rho_3{}^2=1 \tag{15}$$

また ρ 行列と σ 行列とは可換である。数学的にいえば，σ 行列と ρ 行列とは，それぞれ SU(2) 代数をなしている。Dirac 行列はこの二つの代数の直積として与えられる。たとえば

$$\alpha_k=\rho_1\sigma_k,\quad \beta=\rho_3 \tag{16}$$

$$\gamma_k=-i\beta\alpha_k=\rho_2\sigma_k,\quad \gamma_4=\rho_3 \tag{17}$$

$$\gamma_5=-\rho_1 \tag{18}$$

σ と ρ とを用いて前節で導入した Lorentz 変換の**生成演算子**(generator) T を表わすと，たとえば

$$T_{12}=\frac{1}{2}\gamma_1\gamma_2=\frac{1}{2}(\rho_2\sigma_1)(\rho_2\sigma_2)=\frac{1}{2}\sigma_1\sigma_2=\frac{i}{2}\sigma_3 \tag{19}$$

これからわかることは，空間回転に対しては Dirac の波動関数の上の 2 成分と下の 2 成分とは混ざらないということである。したがって非相対論的近似では電子の波動関数を上の 2 成分だけで表現できるのである。

特殊 Lorentz 変換に対しては，たとえば

$$T_{14}=\frac{1}{2}\gamma_1\gamma_4=\frac{1}{2}(\rho_2\sigma_1)\rho_3=\frac{i}{2}\rho_1\sigma_1 \tag{20}$$

この ρ_1 は上の 2 成分と下の 2 成分とを混ぜてしまうので，相対論的理論では 4 成分が必要になるのである。

また Dirac のハミルトニアンを ρ と σ とを用いて表わすと

$$H=\boldsymbol{\alpha p}+\beta m=\rho_1\boldsymbol{\sigma p}+\rho_3 m \tag{21}$$

この形が次節での議論の基礎となる。

Pauli の表現のほかに，γ_5 を対角化した **Weyl の表現**というものがある。これはニュートリノの出てくる弱い相互作用の議論に適している。(21)で $m=0$ ならば $\rho_1=-\gamma_5$ を対角化した表現が便利となることは明らかであろう。

1-9 自由粒子に対する Dirac 方程式

Dirac 方程式を議論するための数学的基礎ができたので，今度はその解

を求めることを考えてみよう。

運動の恒量 もしある演算子$\mathcal{O}$が Dirac のハミルトニアン H と可換ならば，それは運動の恒量である。たとえば自由粒子では

$$[H, H]=0 \qquad \text{エネルギー保存の法則} \tag{1}$$

$$[\boldsymbol{p}, H]=0 \qquad \text{運動量保存の法則} \tag{2}$$

次に角運動量について考えるが，後の都合上問題をちょっと一般化して中心力のポテンシャル $V(r)$ を次の形で加えておく。

$$H=H_0+\rho_k V(r) \qquad (k=1, 2, 3, \text{ あるいは } \rho_k=1) \tag{3}$$

ただし H_0 は自由粒子に対する Dirac のハミルトニアンとする。スピンに依存する力がないときの非相対論的理論では次の軌道角運動量が保存する。

$$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{p} \tag{4}$$

ところが(3)のハミルトニアンに対しては

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{L}, H]&=[\boldsymbol{L}, H_0]+[\boldsymbol{L}, \rho_k V(r)]\\ &=[\boldsymbol{L}, H_0]\\ &\neq 0\end{aligned}$$

なぜならば，たとえば

$$\begin{aligned}[L_3, \boldsymbol{\alpha p}+\beta m]&=\boldsymbol{\alpha}\cdot[L_3, \boldsymbol{p}]\\ &=i(\alpha_1 p_2-\alpha_2 p_1)\end{aligned}$$

この結果を一般化すると，

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{L}, H]&=i\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{p}\\ &=i\rho_1\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{p}\end{aligned} \tag{5}$$

ところで

$$\begin{aligned}[\sigma_3, H]&=\rho_1[\sigma_3, \boldsymbol{\sigma}]\cdot\boldsymbol{p}\\ &=2i\rho_1(\sigma_2 p_1-\sigma_1 p_2)\\ &=-2i\rho_1(\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{p})_3\end{aligned}$$

であるからこの結果を一般化して

$$[\boldsymbol{\sigma}, H]=-2i\rho_1\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{p} \tag{6}$$

したがって全角運動量 $\boldsymbol{J}$ を次のように定義すれば運動の恒量となる。

$$\boldsymbol{J}=\boldsymbol{L}+\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} \tag{7}$$

$$[\boldsymbol{J}, H]=0 \tag{8}$$

このように Dirac 方程式に対しては，軌道角運動量とスピン角運動量とが別々に保存せず，ただその和だけが保存する。このことは非相対論的量

子力学の場合と比較して大きな違いである。またこのようにして Dirac 方程式は**スピン**の存在を特に新しい仮定としてではなく説明しうるという利点がある。すなわちスピンの存在が，Dirac 方程式の中にすでに含まれているのである。この点が非相対論的 Schrödinger 方程式と比べてすぐれている点であるといえるであろう。このほかにもう一つたいせつな保存量がある。

$$h=\frac{\boldsymbol{\sigma p}}{p} \tag{9}$$

とすれば，h は保存する。この量を **helicity**（ヘリシティ）とよぶ（1/2 を乗ずることもある）。

$$[h,\ H_0]=0 \tag{10}$$

自由な Dirac 方程式の解　自由粒子に対してはエネルギーと運動量とが運動の恒量であるから，与えられた運動量 $\boldsymbol{p}$ に対応する解を求めることにする。この解はしたがって運動量の固有状態に対応し，その固有値が $\boldsymbol{p}$ であると考えてよい。平面波に対応して

$$\phi(x)=\frac{1}{\sqrt{V}}e^{i\boldsymbol{px}-iEt}u(p) \tag{11}$$

ここに p は運動量とエネルギーを表わす 4 次元ベクトルであり，この本では 4 次元ベクトルは太字を用いないで表わすことにする。また V はこの系の入れてある箱（通常立方体にとる）の体積であり，これを無限大にとるといろいろと面倒なことが起きるので有限にとっておく。物理的に観測可能な量を計算すると最後の結果は V によらなくなってくるので，そこで初めて V を無限大にとれば，いろいろな混乱をひき起こさないで計算ができる。また $u(p)$ は 4 成分をもち，詳しくは

$$u(p)=\begin{pmatrix} u_1(p) \\ u_2(p) \\ u_3(p) \\ u_4(p) \end{pmatrix} \tag{12}$$

このような 4 成分の量で，1-7 で述べたような変換性を示す量を Dirac スピノルとよぶ。さて(11)の形を Dirac 方程式に代入すると

$$Eu(p)=(\rho_1\boldsymbol{\sigma p}+\rho_3 m)u(p)\equiv H(p)u(p) \tag{13}$$

この方程式は，実は四つの方程式を連立させたもので，それを行列記法でまとめて書いたものである。問題は固有値 E を求めることと，固有スピノル $u(p)$ を求めることである。いろいろな解き方があるが，ここではユ

ニタリー変換の方法を使うことにする。その理由は，この方法が後に述べるように非相対論的近似を考える場合に使われるからである。

さてこの方法の基礎となるのは次の公式である。

$$\exp\left(-\frac{i}{2}a\rho_2\right)\cdot\rho_3\cdot\exp\left(\frac{i}{2}a\rho_2\right)=\rho_3\cos a+\rho_1\sin a \tag{14}$$

この公式は，ρ を σ でおきかえてみればやや見なれたものになるであろう。この証明はここでは与えないが，次の節の計算を見れば見当がつくはずである。そこで

$$\rho_1\boldsymbol{\sigma p}+\rho_3 m=A(\rho_3\cos a+\rho_1\sin a) \tag{15}$$

とおけば

$$A=\sqrt{(\boldsymbol{\sigma p})^2+m^2}=\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2} \tag{16}$$

$$\tan a=\frac{\boldsymbol{\sigma p}}{m} \tag{17}$$

そこで

$$U=\exp\left(\frac{i}{2}a\rho_2\right)=\exp\left(\frac{i}{2}\rho_2\tan^{-1}\frac{\boldsymbol{\sigma p}}{m}\right) \tag{18}$$

と選ぶと

$$U^{-1}\sqrt{m^2+\boldsymbol{p}^2}\,\rho_3 U=H(p) \tag{19}$$

となることがわかる。(18)で与えた U は

$$\tan^{-1}\frac{\boldsymbol{\sigma p}}{m}=\frac{\boldsymbol{\sigma p}}{p}\tan^{-1}\frac{p}{m}\qquad(p=|\boldsymbol{p}|)$$

を用いると次の形に変形されることは容易に証明できる。

$$U=\sqrt{\frac{A+m}{2A}}+i\rho_2\frac{\boldsymbol{\sigma p}}{p}\sqrt{\frac{A-m}{2A}}=\frac{1}{\sqrt{2A}}\left(\sqrt{A+m}+i\rho_2\frac{\boldsymbol{\sigma p}}{\sqrt{A+m}}\right) \tag{20}$$

ただし A は(16)で与えられる。また(19)を書きかえれば

$$UH(p)U^{-1}=\sqrt{m^2+\boldsymbol{p}^2}\,\rho_3 \tag{21}$$

すなわちユニタリー変換 U によって $H(p)$ が対角化されたことになる。この変換を **Foldy–Wouthuysen–Tani(谷)変換**とよび，FWT と略記することにする。さていま

$$v(p)=Uu(p) \tag{22}$$

とおけば，(13)を対角化した式は

$$Ev(p)=A\rho_3 v(p)=\sqrt{m^2+\boldsymbol{p}^2}\,\rho_3 v(p) \tag{23}$$

ところが ρ_3 はすでに対角化されているから直ちに次の解が得られる。

1) $E=\sqrt{m^2+\boldsymbol{p}^2}$ に対応する解

$$v(p)=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} \tag{24}$$

2) $E=-\sqrt{m^2+\boldsymbol{p}^2}$ に対応する解

$$v(p)=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \tag{25}$$

いずれの場合にもエネルギー固有値は縮退しているが，この縮退した解を区別するためにはスピンを考えればよい。あるいは helicity h を用いると

$$\frac{\boldsymbol{\sigma p}}{p}v(p)=\pm v(p) \tag{26}$$

正エネルギーに対する解も負エネルギーに対する解も，それぞれ上のあるいは下の 2 成分ずつしか考えなくてよいから，(26)を満たす 2 成分の固有関数をとると

1) $h=+1$ の解

$$v_+(p)=\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2}\\ \sin\frac{\theta}{2}e^{i\varphi}\end{pmatrix} \tag{27}$$

2) $h=-1$ の解

$$v_-(p)=\begin{pmatrix}-\sin\frac{\theta}{2}e^{-i\varphi}\\ \cos\frac{\theta}{2}\end{pmatrix} \tag{28}$$

したがって 4 個の解は，エネルギーと helicity との符号で区別される。

1) $E=\sqrt{m^2+\boldsymbol{p}^2}$， $h=+1$

$$v(p)=\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2}\\ \sin\frac{\theta}{2}e^{i\varphi}\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \tag{29}$$

2) $E=\sqrt{m^2+\boldsymbol{p}^2}$， $h=-1$

$$v(p)=\begin{pmatrix} -\sin\dfrac{\theta}{2}e^{-i\varphi} \\ \cos\dfrac{\theta}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{30}$$

3)　$E=-\sqrt{m^2+\boldsymbol{p}^2}$，$h=+1$

$$v(p)=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos\dfrac{\theta}{2} \\ \sin\dfrac{\theta}{2}e^{i\varphi} \end{pmatrix} \tag{31}$$

4)　$E=-\sqrt{m^2+\boldsymbol{p}^2}$，$h=-1$

$$v(p)=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\sin\dfrac{\theta}{2}e^{-i\varphi} \\ \cos\dfrac{\theta}{2} \end{pmatrix} \tag{32}$$

このような $v(p)$ が得られたら $u(p)$ は(22)から直ちに求められる。すなわち

$$u(p)=U^{-1}v(p) \tag{33}$$

変換 U によって，エネルギーも helicity も固有値は $u(p)$ に引き継がれる。

この結果からわかることは，縮退した状態は二つの helicity 状態に分かれ，したがって Dirac 方程式はスピン 1/2 の粒子を表わすということである。これは前に得られた全角運動量 $\boldsymbol{J}$ の式(7)と矛盾しない。もう一つたいせつなことは**負エネルギー状態**の存在で，これは初め Dirac 理論の難点と考えられていたが，後にかえってこの理論の長所であることがわかった。

ここで非相対論的理論との関係について言及しよう。すでにわかったようにエネルギーが正の場合の解は

$$v(p)=\begin{pmatrix} \times \\ \times \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (\times：必ずしも 0 でない数)$$

の形をしており，上の2成分しか生き残らない。ところで v に U^{-1} を乗ずると上の2成分と下の2成分とが混ざってしまう。しかしながら $p/m\ll 1$ である限り上の2成分が下の2成分よりもずっと大きい。このことを確かめるには(20)の Hermite 共役をとって得られる

$$U^{-1}=\frac{1}{\sqrt{2A}}\left(\sqrt{A+m}-i\rho_2\frac{\boldsymbol{\sigma p}}{\sqrt{A+m}}\right) \tag{34}$$

を用いる。すなわち，4成分の $u(p)$ を2成分の φ と χ とを用いて

$$u(p)=\begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix} \tag{35}$$

と表わすと，φ と χ との関係は(34)からわかるように，$p/m\ll 1$ ならば

$$\chi=\frac{\boldsymbol{\sigma p}}{E+m}\varphi\ll\varphi \tag{36}$$

したがって非相対論的近似は上の2成分のみを残すことにより得られる。

ジグザグ運動(Zitterbewegung)　非相対論的量子力学における速度は次式で与えられる。

$$\dot{x}_j=i[H,\, x_j]=i\left[\frac{\boldsymbol{p}^2}{2m}+V,\, x_j\right]=\frac{p_j}{m} \tag{37}$$

すなわち速度と運動量とは簡単な比例関係にある。ところが Dirac 理論では速度と運動量とは無関係になってしまう。つまり

$$\dot{x}_j=i[H,\, x_j]=i[\boldsymbol{\alpha p}+\beta m,\, x_j]=\alpha_j \tag{38}$$

ところで α_j の固有値は ± 1 である。CGS 単位では光速度 c になる。ところが実際の Dirac 粒子たとえば電子は光速度で走っていない。これはなぜであろうか。それは，自由粒子の場合でも $\dot{x}_j$ は p_j と比例せず，したがって運動の恒量ではないからである。つまり

$$[\alpha_j,\, H]\neq 0 \tag{39}$$

したがって我々が観測しているのは α_j の期待値のみである†。すなわち，

$$\langle\alpha_j\rangle=\int\psi^\dagger\alpha_j\psi\, d^3x\Big/\int\psi^\dagger\psi\, d^3x \tag{40}$$

電子の瞬間速度は光速度に達したとしても，電子は絶えず行きつ戻りつして平均すると光速度以下で進むことになる。このような運動を**ジグザグ運動**あるいは **Zitterbewegung** とよぶ。これは非相対論では考えられなかった新しい現象である。次に自由粒子については，$\langle\alpha_j\rangle$ が古典論と同様に

---

† 速度というものは一つの時刻では測定できないので，必ずある時間間隔をおいてその間に進んだ距離を測らなければならないことに注意せよ。

$$\langle\alpha_j\rangle=\frac{p_j}{E}\equiv v_j \tag{41}$$

で与えられることを証明しよう。ただし(41)では相対論は考慮に入れている。

まず 1-5 (13) の規格化条件に (11) を代入すると，u の規格化条件は

$$u^\dagger u=1 \tag{42}$$

で与えられる。しかし $u^\dagger u$ は Lorentz 不変量ではないから(42)を用いず

$$\langle\alpha_j\rangle=\frac{u^\dagger\alpha_j u}{u^\dagger u} \tag{43}$$

とおいて，u の規格化をはっきり決めないでおいた方が便利である。さて(41)で定義される速度 $\boldsymbol{v}$ を用いて，電子の静止系へ移る Lorentz 変換をする。ここで電子の静止系とは平均として電子が静止している系，あるいは運動量が 0 になるような慣性系を意味する。このような系では u が u_0 に移るとすると，

$$u_0{}^\dagger u_0=\text{有限},\qquad u_0{}^\dagger\boldsymbol{\alpha}u_0=0 \tag{44}$$

となることは，すでに求めた Dirac 方程式の解から明らかであろう。そこで元の系に Lorentz 変換をしてやると，$u^\dagger u$, $u^\dagger\boldsymbol{\alpha}u$ が 4 次元ベクトルとして変換するという事実から

$$\begin{aligned}u^\dagger u : u^\dagger\alpha_1 u : u^\dagger\alpha_2 u : u^\dagger\alpha_3 u &= E : p_1 : p_2 : p_3\\ &= 1 : v_1 : v_2 : v_3\end{aligned} \tag{45}$$

したがってこの結果を(43)に代入すると(41)が得られる。また

$$E=\langle H(p)\rangle=\langle\boldsymbol{\alpha}\rangle\cdot\boldsymbol{p}+\langle\beta\rangle m$$

より直ちに次の結果が得られる。

$$\langle\beta\rangle=\sqrt{1-v^2} \tag{46}$$

このようにして我々は自由な Dirac 粒子が非相対論のときとはいろいろな点でかなり違っていることがわかった。そこで次に静的な電磁場がある場合の議論に移ろう。

1-10　静電磁場における Dirac 方程式

前節で自由な Dirac 粒子の性質を調べた。そこで次に簡単な問題を考えるとすると静的な電磁場の存在するときであろう。電磁的相互作用は電子の場合には最もたいせつな相互作用である。さて電磁的相互作用を導入するには Dirac 方程式において， Dirac のおきかえ，すなわち 1-4 の

(2)を行なえばよい。すると問題の方程式は次の形に書ける。

$$\gamma_\mu\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu}-ieA_\mu\right)\psi+m\psi=0 \tag{1}$$

あるいは

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi=\{\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{p}-e\boldsymbol{A})+\beta m+e\varphi\}\psi \tag{2}$$

Klein-Gordon 方程式との比較 上の方程式(1)に左から次の演算子を乗ずる。

$$\gamma_\lambda\left(\frac{\partial}{\partial x_\lambda}-ieA_\lambda\right)-m$$

そうすると次の方程式が得られる。ただし ∂_λ は $\partial/\partial x_\lambda$ を表わす。

$$\{\gamma_\lambda(\partial_\lambda-ieA_\lambda)\gamma_\mu(\partial_\mu-ieA_\mu)-m^2\}\psi=0 \tag{3}$$

あるいは

$$\{\gamma_\lambda\gamma_\mu(\partial_\lambda-ieA_\lambda)(\partial_\mu-ieA_\mu)-m^2\}\psi=0$$

ところで

$$\begin{aligned}\gamma_\lambda\gamma_\mu&=\frac{1}{2}(\gamma_\lambda\gamma_\mu+\gamma_\mu\gamma_\lambda)+\frac{1}{2}(\gamma_\lambda\gamma_\mu-\gamma_\mu\gamma_\lambda)\\&=\delta_{\lambda\mu}+i\sigma_{\lambda\mu}\end{aligned}$$

であるから，問題の方程式は

$$\begin{aligned}&\{(\partial_\lambda-ieA_\lambda)^2-m^2+i\sigma_{\lambda\mu}(\partial_\lambda-ieA_\lambda)(\partial_\mu-ieA_\mu)\}\psi\\&=\left\{(\partial_\lambda-ieA_\lambda)^2-m^2+\frac{i}{2}\sigma_{\lambda\mu}[\partial_\lambda-ieA_\lambda,\ \partial_\mu-ieA_\mu]\right\}\psi\\&=\left\{(\partial_\lambda-ieA_\lambda)^2-m^2+\frac{e}{2}\sigma_{\lambda\mu}F_{\lambda\mu}\right\}\psi=0\end{aligned} \tag{4}$$

ただし $F_{\lambda\mu}$ は **1-4** の(9)で定義された場の強さである。この式を電磁場があるときの Klein-Gordon 方程式と比較すると，すなわち **1-4** の(3)と比較すると，最後の $\sigma_{\lambda\mu}F_{\lambda\mu}$ の項だけ異なっている。これは明らかにスピンと電磁場との相互作用を表わしている。

荷電共役(charge conjugation) いま仮に次の Dirac 方程式の解が知られているものとする。

$$\{\gamma_\lambda(\partial_\lambda-ieA_\lambda)+m\}\psi=0 \tag{5}$$

そうすると適当な変換によって次の方程式の解が導き出される。

$$\{\gamma_\lambda(\partial_\lambda+ieA_\lambda)+m\}\psi'=0 \tag{6}$$

さて(5)と(6)とを比べると，ちょうど荷電の符号が逆になっているので，この変換を**荷電共役**とよぶ。この変換を求めるために次の関係を満たす行

列Cを考える。

$$C^{-1}\gamma_\mu C=-\gamma_\mu{}^{\mathrm{T}} \tag{7}$$

ただし右肩の T は転置行列(transposed matrix)を表わし，元の行列の行と列とを入れかえたものである。さて(7)を満たすユニタリーな Dirac 行列Cが見つかったとすると，荷電共役は

$$\psi'=C\bar{\psi},\qquad \text{あるいは}\quad \psi_r'=\sum_s C_{rs}\bar{\psi}_s \tag{8}$$

ただしこの変換は正エネルギー解と負エネルギー解とを入れかえてしまう。

（証明）　Dirac 方程式の Hermite 共役を作り，γ_4 を右から乗ずると

$$(\partial_\lambda+ieA_\lambda)\bar{\psi}\gamma_\lambda-m\bar{\psi}=0 \tag{9}$$

この出し方は **1-7** の(22)の場合と全く同じである。あるいは

$$\sum_s(\gamma_\lambda{}^{\mathrm{T}})_{rs}(\partial_\lambda+ieA_\lambda)\bar{\psi}_s-m\bar{\psi}_r=0 \tag{10}$$

または

$$\sum_s(C^{-1}\gamma_\lambda C)_{rs}(\partial_\lambda+ieA_\lambda)\bar{\psi}_s+m\bar{\psi}_r=0 \tag{11}$$

そこで(8)の ψ' を用いると

$$\sum_r(C^{-1}\gamma_\lambda)_{tr}(\partial_\lambda+ieA_\lambda)\psi_r'+m\sum_r C_{tr}^{-1}\psi_r'=0 \tag{12}$$

次に左から行列Cを乗ずると，方程式(6)が得られる。（証明終）

次に行列Cの性質を調べてみよう。(7)において γ_μ と $-\gamma_\mu{}^{\mathrm{T}}$ とはそれぞれ交換関係

$$\gamma_\mu\gamma_\nu+\gamma_\nu\gamma_\mu=2\delta_{\mu\nu}\mathbf{1},\qquad (-\gamma_\mu{}^{\mathrm{T}})(-\gamma_\nu{}^{\mathrm{T}})+(-\gamma_\nu{}^{\mathrm{T}})(-\gamma_\mu{}^{\mathrm{T}})=2\delta_{\mu\nu}\mathbf{1} \tag{13}$$

を満たすから，行列Cはユニタリーに選ぶことができる。すなわち

$$CC^\dagger=C^\dagger C=\mathbf{1} \tag{14}$$

さて(7)を転置した方程式を作ると

$$C^{\mathrm{T}}\gamma_\mu{}^{\mathrm{T}}(C^{\mathrm{T}})^{-1}=-\gamma_\mu$$

この $\gamma_\mu{}^{\mathrm{T}}$ に(7)を代入すると

$$C^{\mathrm{T}}C^{-1}\gamma_\mu C(C^{\mathrm{T}})^{-1}=\gamma_\mu$$

あるいは

$$(C^{\mathrm{T}}C^{-1})\gamma_\mu(C^{\mathrm{T}}C^{-1})^{-1}=\gamma_\mu \tag{15}$$

したがって $C^{\mathrm{T}}C^{-1}$ はすべての Dirac 行列と可換になり，単位行列に比例しなければならない。そこで

$$C^{\mathrm{T}}C^{-1}=a\mathbf{1}\qquad(|a|=1) \tag{16}$$

とおく。aの絶対値が1に等しいのは左辺がユニタリーだからである。さてこの数aは表現の選び方によらないことが次のようにして証明される。

すなわち

$$\gamma_\mu{}' = S\gamma_\mu S^{-1} \quad (S\text{はユニタリー}) \tag{17}$$

により新しい表現を作ったとすると，この表現ではCは次式で与えられることが容易に証明される。

$$C' = SCS^{\mathrm{T}} \tag{18}$$

ゆえに

$$C'^{\mathrm{T}}C'^{-1} = C^{\mathrm{T}}C^{-1} = a1 \tag{19}$$

したがって数aは表現の選び方によらないことがわかり，一つの特別な表現でaを決めれば，どんな表現においても同じaを使うことができる。

さて Pauli 表現を考えると，1-8 の結果から

$$\gamma_\mu{}^{\mathrm{T}} = \begin{cases} \gamma_\mu & (\mu=2,\ 4) \\ -\gamma_\mu & (\mu=1,\ 3) \end{cases} \tag{20}$$

したがってこの表現ではCとして次の行列をとればよい。

$$C = \gamma_2\gamma_4 \tag{21}$$

すると $C^{\mathrm{T}}C^{-1} = \gamma_4{}^{\mathrm{T}}\gamma_2{}^{\mathrm{T}}\gamma_4\gamma_2 = \gamma_4\gamma_2\gamma_4\gamma_2 = -1$ となるから，$a=-1$ である。ゆえに(19)を次のように書くこともできる。

$$C^{\mathrm{T}} = -C \tag{22}$$

すなわち行列Cは常に反対称行列でなければならない。上の議論は同時に行列Cの存在を証明している。

次に$\bar{\psi}$が荷電共役によりどのように変換されるかを調べてみよう。答は

$$\bar{\psi}' = C^{-1}\psi \tag{23}$$

(証明)

$$\begin{aligned}
\bar{\psi}_r{}' &= \sum_s \psi_s{}'^*(\gamma_4)_{sr} \\
&= \sum_s \Big(\sum_t C_{st}\bar{\psi}_t\Big)^*(\gamma_4)_{sr} \\
&= \sum_{s,t} C_{st}{}^*\bar{\psi}_t{}^*(\gamma_4)_{sr} \\
&= \sum_{s,t,u} C_{ts}^{-1}\psi_u(\gamma_4)_{ut}{}^*(\gamma_4)_{sr} \\
&= \sum_{s,t,u} C_{ts}^{-1}(\gamma_4)_{tu}\psi_u(\gamma_4)_{sr} \\
&= \sum_{t,u} (C^{-1}\gamma_4)_{tr}(\gamma_4)_{tu}\psi_u \\
&= \sum_{u,t} (-\gamma_4{}^{\mathrm{T}}C^{-1})_{tr}(\gamma_4{}^{\mathrm{T}})_{ut}\psi_u \\
&= \sum_u (-C^{-1})_{ur}\psi_u \\
&= \sum_u C_{ru}^{-1}\psi_u \\
&= (C^{-1}\psi)_r
\end{aligned}$$

(証明終)

この計算はちょっと長いが完全に機械的にできる。

非相対論的近似 (4)を少し書き直すと

$$\left\{(p_\lambda-eA_\lambda)^2+m^2-\frac{e}{2}\sigma_{\lambda\mu}F_{\lambda\mu}\right\}\psi=0 \tag{24}$$

ここで外場は静的であるとして，上の式を次の形に書く。

$$(E-e\varphi)^2\psi=\left\{(\boldsymbol{p}-e\boldsymbol{A})^2+m^2-\frac{e}{2}\sigma_{\lambda\mu}F_{\lambda\mu}\right\}\psi \tag{25}$$

ただし，ポテンシャルはすべて t によらないとし，Eはこの系のエネルギー固有値を表わすとする。次に $E=m+W$ とおき，$m\gg W$ を仮定すると，まず(25)を次の形に書き直し

$$\{2m(W-e\varphi)+(W-e\varphi)^2\}\psi=\left\{(\boldsymbol{p}-e\boldsymbol{A})^2-\frac{e}{2}\sigma_{\lambda\mu}F_{\lambda\mu}\right\}\psi \tag{26}$$

において次の仮定を使うことができる。

$$\frac{W-e\varphi}{2m}\ll 1 \tag{27}$$

したがって(26)の非相対論的近似は

$$W\psi=\left\{\frac{(\boldsymbol{p}-e\boldsymbol{A})^2}{2m}+e\varphi-\frac{e}{4m}\sigma_{\lambda\mu}F_{\lambda\mu}\right\}\psi \tag{28}$$

で与えられる。W は運動のエネルギー，あるいは全エネルギーから静止エネルギーを引いたものであるから，(28)は非相対論的量子力学における Schrödinger の方程式に相当する。さらに前節(35)を参照して上の2成分のみを残す近似をすれば，この近似は(27)と本質的に同じであるから使わなければならないが，(28)の右辺の最後の項で，上の2成分と下の2成分とを結びつける σ_{4k} のような行列を含む項が省略されることになり

$$W\approx\frac{(\boldsymbol{p}-eA)^2}{2m}+e\varphi-\frac{e}{2m}\boldsymbol{\sigma H} \tag{29}$$

が得られる。この式は，電子が次式で与えられるような**固有の磁気モーメント**をもつことを意味する。この式は，非相対論的量子力学では経験事実であったが，Dirac の理論では第一原理から出発して導き出される。このように簡単明瞭な証明ができるのは Dirac の理論の正しさを支持している。

$$\boldsymbol{\mu}=\frac{e}{2m}\boldsymbol{\sigma} \tag{30}$$

なお CGS 単位系では $e/2m$ は $e\hbar/2mc$ でおきかえられる。また上に導入した近似は **Schrödinger 近似**とよばれる。

偶行列，奇行列および FWT 変換　すでに述べたように速度 v が小さいときに

$$\psi=\begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix} \tag{31}$$

とおけば，χ は φ と比べて v の程度の量となる。非相対論的近似の目的は適当な変換により χ を消去して 2 成分の方程式を作ることである。φ は大きい成分(large component)，χ は小さい成分(small component)とよばれる。また Dirac 行列で φ と χ とを結びつけるものを**奇行列**(odd matrix)，そうでないものを**偶行列**(even matrix)とよぶ。たとえば ρ_1 とか ρ_2 およびそれに適当な σ 行列を乗じたものは奇行列であり，ρ_3 とか 1 に適当な σ 行列を乗じたものは偶行列である。具体的には，偶行列，奇行列は次のような形をしている。

$$\text{偶行列}=\left(\begin{array}{cc|cc}\times&\times&0&0\\ \times&\times&0&0\\ \hline 0&0&\times&\times\\ 0&0&\times&\times\end{array}\right),\quad \text{奇行列}=\left(\begin{array}{cc|cc}0&0&\times&\times\\ 0&0&\times&\times\\ \hline \times&\times&0&0\\ \times&\times&0&0\end{array}\right) \tag{32}$$

ただし×は 0 でない行列要素を表わしている。

定理　$\mathcal{E}$ を任意の偶行列，$\mathcal{O}$ を任意の奇行列とすると

$$\gamma_4\mathcal{E}\gamma_4=\mathcal{E},\qquad \gamma_4\mathcal{O}\gamma_4=-\mathcal{O} \tag{33}$$

したがって任意の Dirac 行列 M は偶行列と奇行列の和に一意的に分解できる。(証明略)

$$M=M_{\text{even}}+M_{\text{odd}}=\frac{1}{2}(M+\gamma_4M\gamma_4)+\frac{1}{2}(M-\gamma_4M\gamma_4) \tag{34}$$

自由な Dirac 方程式は FWT 変換で偶行列に変換できたが，外場がある場合には閉じた形でこのような簡単な変換が見つけられない。そこで v あるいは p/m の展開で最初の方の項のみを拾うことにする。さて外場のない場合には 1-9 で示したように

$$UH(p)U^{-1}=\sqrt{m^2+\boldsymbol{p}^2}\,\rho_3 \tag{35}$$

ただし

$$U=\exp\left(\frac{i}{2}\rho_2\tan^{-1}\frac{\boldsymbol{\sigma p}}{m}\right) \tag{36}$$

で与えられる。外場のあるときにも使うために，まず U の第一近似として

$$U_1=\exp\left(\frac{i}{2}\rho_2\frac{\boldsymbol{\sigma p}}{m}\right)$$

を考えてみよう。同じ近似で外場のあるときに

$$U_1=\exp\left\{\frac{i}{2}\rho_2\frac{\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{p}-eA)}{m}\right\} \tag{37}$$

を定義する。そして $U_1HU_1^{-1}$ を計算してみよう。ただし H は

$$H=\rho_1\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{p}-eA)+\rho_3 m+e\varphi \tag{38}$$

で与えられる。この計算をするためには $H=\rho_3 m+\mathcal{E}+\mathcal{O}$ とおき，次の公式を使う。

$$e^{iS}He^{-iS}=H+i[S,\ H]+\frac{i^2}{2!}[S[S,\ H]]+\cdots \tag{39}$$

もしSが v の程度の量であれば高次の項を省略できる。実際 U_1 に対しては $S\sim O(p/m)$ であるから次のように計算ができる。

$$\begin{aligned}H'&=e^{iS}He^{-iS}\\&=\underset{1}{\rho_3 m}+\underset{0}{\mathcal{E}}+\underset{0}{\mathcal{O}}\quad\cdots\cdots\ m\text{ のべき}\\&\quad+i[S,\ \underset{0}{\rho_3 m}+\underset{-1}{\mathcal{E}}+\underset{-1}{\mathcal{O}}]\\&\quad+\frac{i^2}{2}[S[S,\ \underset{-1}{\rho_3 m}+\underset{-2}{\mathcal{E}}+\underset{-2}{\mathcal{O}}]]+\cdots\end{aligned} \tag{40}$$

ただし各項の下に書いてある数字は m のべきを示す。これを整理して

$$\begin{aligned}H'=\rho_3 m&&m^1\\+\mathcal{E}+\mathcal{O}+i[S,\ \rho_3 m]&&m^0\\+i[S,\ \mathcal{E}+\mathcal{O}]-\frac{1}{2}[S[S,\ \rho_3 m]]&&m^{-1}\\+\frac{i^2}{2}[S[S,\ \mathcal{E}+\mathcal{O}]]-\frac{i}{6}[S[S[S,\ \rho_3 m]]]&&m^{-2}\\+\cdots&&\end{aligned} \tag{41}$$

さてこの問題においては

$$\mathcal{E}=e\varphi,\quad \mathcal{O}=\rho_1\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{p}-e\boldsymbol{A}),\qquad S=\frac{\rho_2}{2}\frac{\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{p}-eA)}{m} \tag{42}$$

とおけるから，これらの式を使っていろいろな交換子を計算することができる。そしてこの結果を H' に代入すればよい。まず

$$\begin{aligned}i[S,\ \rho_3 m]&=im[S,\ \rho_3]\\&=im\left[\frac{\rho_2}{2},\ \rho_3\right]\frac{\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{p}-e\boldsymbol{A})}{m}\\&=-\rho_1\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{p}-e\boldsymbol{A})\\&=-\mathcal{O}\end{aligned} \tag{43}$$

したがって H' は次の形に書ける。

$$H'=\underset{1}{\rho_3 m}+\underset{0}{\mathcal{E}}+\underset{-1}{i[S,\mathcal{E}]}+\underset{-1}{\frac{i}{2}[S,\mathcal{O}]}-\underset{-2}{\frac{1}{2}[S[S,\mathcal{E}]]}+\cdots \tag{44}$$

こうして H' は U_1 により m^0 のべきまで偶行列になった。一番低いべきの奇行列の項は $i[S,\mathcal{E}]$ であるから，この項を消去するためにもう一度ユニタリー変換を導入する。すなわち

$$H''=e^{iS'}H'e^{-iS'} \tag{45}$$

ただし

$$H'=H_{\mathrm{NR}}+i[S,\mathcal{E}]-\frac{1}{2}[S[S,\mathcal{E}]] \tag{46}$$

$$H_{\mathrm{NR}}=\rho_3 m+\mathcal{E}+\frac{i}{2}[S,\mathcal{O}] \tag{47}$$

ただし H_{NR} はすでに偶行列になってしまっている部分である。そうすれば

$$\begin{aligned}e^{iS'}H'e^{-iS'}&=H'+i[S',H']+\cdots\\&=H_{\mathrm{NR}}+i[S,\mathcal{E}]-\frac{1}{2}[S[S,\mathcal{E}]]+i[S',H_{\mathrm{NR}}]+\cdots\end{aligned} \tag{48}$$

さて

$$\begin{aligned}i[S,\mathcal{E}]&=i\left[\frac{\rho_2}{2}\frac{\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{p}-e\boldsymbol{A})}{m},\ e\varphi\right]\\&=\frac{\rho_2}{2}(\boldsymbol{\sigma}\nabla)\varphi\cdot\frac{e}{m}\end{aligned} \tag{49}$$

そこで S' は m^{-2} のべきであると考えて，次式で S' を決める。

$$i[S',H_{\mathrm{NR}}]\simeq -i[S,\mathcal{E}] \tag{50}$$

ただしこの方程式は m^{-1} のべきまで正しく解く。左辺の m^{-1} のべきの項はしたがって H_{NR} を $\rho_3 m$ でおきかえたもので与えられるから

$$i[S',\rho_3 m]=-\frac{\rho_2}{2}(\boldsymbol{\sigma}\nabla)\varphi\cdot\frac{e}{m} \tag{51}$$

この解は

$$S'=-\frac{e}{4m^2}\rho_1(\boldsymbol{\sigma}\nabla)\varphi \tag{52}$$

ゆえに H'' は

$$H''=\underset{1,0,-1}{H_{\mathrm{NR}}}-\underset{-2}{\frac{1}{2}[S[S,\mathcal{E}]]}+(m^{-2}\text{ のべきの奇行列})+\cdots \tag{53}$$

さらにユニタリー変換で m^{-2} のべきの奇行列を消去できるから，結局 m^{-2} のべきまで偶行列になったハミルトニアンを書いてみると

$$H''=\rho_3 m+e\varphi+\frac{i}{2}[S,\mathcal{O}]-\frac{1}{2}[S[S,\mathcal{E}]] \tag{54}$$

ただし

$$\frac{i}{2}[S,\ \mathcal{O}]=\frac{i}{4m}[\rho_2,\ \rho_1]\{\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{p}-e\boldsymbol{A})\}^2$$

$$=\frac{\rho_3}{2m}\{(\boldsymbol{p}-e\boldsymbol{A})^2-e\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{H}\} \tag{55}$$

$$i[S,\ \mathcal{E}]=\frac{e}{2m}\rho_2(\boldsymbol{\sigma}\nabla)\varphi \tag{56}$$

$$-\frac{1}{2}[S[S,\ \mathcal{E}]]=\frac{i}{2}\left[\frac{\rho_2}{2m}\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{p}-e\boldsymbol{A}),\ \frac{e}{2m}\rho_2(\boldsymbol{\sigma}\nabla)\varphi\right]$$

$$=\frac{ie}{8m^2}[\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{p}-e\boldsymbol{A}),\ (\boldsymbol{\sigma}\nabla)\varphi] \tag{57}$$

さて Schrödinger 近似は (54) の最初の 3 項で与えられる。上の (57) を H_{corr} と書く。これは Schrödinger 近似に対する correction(補正) という意味である。(57)を計算してみると，結局次の結果が得られる。

$$H_{\mathrm{corr}}=-\frac{e}{8m^2}\operatorname{div}\boldsymbol{E}-\frac{e}{4m^2}\boldsymbol{\sigma}\cdot\{\boldsymbol{E}\times(\boldsymbol{p}-e\boldsymbol{A})\} \tag{58}^{\dagger}$$

ただし $\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi$ で与えられる。さて H'' は完全に偶行列から成り立つから，上の 2 成分のみを残す。そして静止質量 m の項を除くと

$$H''=\frac{1}{2m}(\boldsymbol{p}-e\boldsymbol{A})^2+e\varphi-\frac{e}{2m}\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{H}$$

$$-\frac{e}{8m^2}\operatorname{div}\boldsymbol{E}-\frac{e}{4m^2}\boldsymbol{\sigma}\cdot\{\boldsymbol{E}\times(\boldsymbol{p}-e\boldsymbol{A})\} \tag{59}$$

この近似を **Pauli 近似**とよぶ。

中心的静電場における Pauli 近似　$A=0,\ \varphi=\varphi(r)$ のときに Pauli 近似を考えると

$$\operatorname{div}\boldsymbol{E}=4\pi\rho \tag{60}$$

$$\boldsymbol{E}=-\frac{\boldsymbol{r}}{r}\frac{d\varphi}{dr} \tag{61}$$

したがって Pauli 近似でのハミルトニアンは

$$H''=\frac{\boldsymbol{p}^2}{2m}+e\varphi-\underbrace{\frac{\pi e}{2m^2}\rho}_{\text{Darwin 項}}+\underbrace{\frac{e}{4m^2r}\frac{d\varphi}{dr}\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{L}}_{\text{spin-orbit coupling}} \tag{62}$$

ただし $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}$ は軌道角運動量を表わす。いま点荷電としての原子核を考える。e は電子の荷電だから，原子核の荷電は $-Ze$ である。したがって

† この式は非静的な場合でも得られる。この場合 $\boldsymbol{E}=-\dot{\boldsymbol{A}}-\nabla\varphi$ であり，$\dot{\boldsymbol{A}}$ は $\left[i\frac{\partial}{\partial t},\ S\right]$ より得られる。

$$\varphi=\frac{Z|e|}{r}=-\frac{Ze}{r} \tag{63}$$

$$\rho=\frac{1}{4\pi}\mathrm{div}\,\boldsymbol{E}=-\frac{1}{4\pi}\Delta\varphi=-Ze\delta^3(\boldsymbol{r}) \tag{64}$$

そこで H'' を次のように分ける。

$$H''=H_0+H_{\mathrm{corr}} \tag{65}$$

$$H_0=\frac{\boldsymbol{p}^2}{2m}+e\varphi=\frac{\boldsymbol{p}^2}{2m}-\frac{Ze^2}{r} \tag{66}$$

$$H_{\mathrm{corr}}=H_{LS}+H_{\mathrm{D}} \tag{67}$$

ただし H_{LS} および H_{D} はそれぞれ **spin-orbit coupling**（スピン・軌道相互作用）と **Darwin** 項を表わす。そして H_{corr} を摂動として束縛状態の準位のずれを計算する。

1) ***LS* 項** H_0 は $\boldsymbol{J}=\boldsymbol{L}+\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}$ と $\boldsymbol{L}$ とのいずれとも交換可能であるから，両者を同時に対角化し，二つの量子数 j と l とを次式で導入する。

$$\boldsymbol{J}^2=j(j+1), \qquad \boldsymbol{L}^2=l(l+1) \tag{68}$$

そうすると

$$\boldsymbol{J}^2=\boldsymbol{L}^2+\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{L}+\frac{1}{4}\boldsymbol{\sigma}^2=\boldsymbol{L}^2+\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{L}+\frac{3}{4}$$

より直ちに $\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{L}$ の固有値が次のように与えられる。

$$\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{L}=\begin{cases} l & \left(j=l+\frac{1}{2}\right) \\ -(l+1) & \left(j=l-\frac{1}{2}\right) \end{cases} \tag{69}$$

そこで H_{LS} の期待値を計算すると

$$\begin{aligned}\langle H_{LS}\rangle&=\frac{e}{4m^2}\left\langle\frac{Ze}{r^3}\right\rangle\langle\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{L}\rangle\\&=\frac{Z\alpha}{4m^2}\left\langle\frac{1}{r^3}\right\rangle\langle\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{L}\rangle\end{aligned} \tag{70}$$

ただし，$\alpha=e^2$（あるいは CGS 単位では $e^2/\hbar c$）は無次元の数で微細構造定数(fine structure constant)とよばれ，その数値は

$$\alpha=\frac{1}{137.037} \tag{71}$$

また r^{-3} の期待値を計算すると

$$\left\langle\frac{1}{r^3}\right\rangle_{n,l}=\frac{(Z\alpha m)^3}{n^3 l(l+1)(l+1/2)} \qquad (l\neq 0) \tag{72}$$

ただし，n は主量子数，l は(68)で定義された軌道角運動量の量子数である。したがって

$$\langle H\rangle_{n,l}=\frac{Z^4\alpha^4 m}{4n^3 l(l+1)(l+1/2)}\langle\boldsymbol{\sigma L}\rangle$$

$$=\begin{cases} Z^4\alpha^2\left(\dfrac{\alpha}{4a_0}\right)\dfrac{1}{n^3 l(l+1)(l+1/2)}\langle\boldsymbol{\sigma L}\rangle & (l\neq 0) \\ 0 & (l=0)\end{cases} \tag{73}$$

ただし a_0 は Bohr 半径 $1/m\alpha$，あるいは CGS 単位で $\hbar^2/me^2$ を表わしている。これから n, l が共通であり j の異なる**二重項**(doublet)の準位の分裂が求まる。

$$\Delta E_{j=l+\frac{1}{2}}-\Delta E_{j'=l-\frac{1}{2}}=Z^4\alpha^2\left(\frac{\alpha}{2a_0}\right)\frac{1}{n^3 l(l+1)} \tag{74}$$

ただしこの式は摂動のないときの **Bohr の準位公式**と比べられるべきもので，比較のために Bohr の公式を書くと

$$E_{n,l}=-\frac{Z^2\alpha^2 m}{2n^2}=-Z^2\left(\frac{\alpha}{2a_0}\right)\frac{1}{n^2}$$

2) Darwin 項　この項の存在はジグザグ運動によるものであって

$$\langle H_{\mathrm{D}}\rangle=\frac{\pi Z\alpha}{2m^2}|\psi(0)|^2 \tag{75}$$

この項は明らかに $l=0$ のときしか残らず，LS 項とはその点で逆である。このとき

$$|\psi(0)|^2=\frac{1}{\pi}\frac{Z^3}{n^3}\left(\frac{1}{a_0}\right)^3 \qquad (l=0) \tag{76}$$

であるから

$$\langle H_{\mathrm{D}}\rangle=Z^4\alpha^2\left(\frac{\alpha}{2a_0}\right)\frac{1}{n^3} \qquad (l=0) \tag{77}$$

$l=0$, $l\neq 0$ の両方の場合について，この結果を次のようにまとめることができる。

$$\langle H_{\mathrm{corr}}\rangle=Z^4\alpha^2\left(\frac{\alpha}{2a_0}\right)\frac{1}{n^3(l+1)(2l+1)}\times\begin{cases}1 & \left(j=l+\dfrac{1}{2}\right)\\ -\dfrac{l+1}{l} & \left(j=l-\dfrac{1}{2}\right)\end{cases} \tag{78}$$

一様な静磁場中の Dirac 粒子　次に一様な静磁場の中での Dirac 方程式のエネルギー準位を求めてみよう。いま磁場の方向を z 方向に選び，その強さを H としよう。すなわち，$\boldsymbol{H}=(0, 0, H)$. そうすると，この場合にはスカラー・ポテンシャルは用いる必要がないから Dirac 方程式は次の形に書ける。

$$\{\rho_1\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{p}-e\boldsymbol{A})+\rho_3 m\}\psi=E\psi \tag{79}$$

上の2成分を φ, 下の2成分を χ とすると

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{p}-e\boldsymbol{A})\chi+m\varphi=E\varphi\\ \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{p}-e\boldsymbol{A})\varphi-m\chi=E\chi\end{aligned} \tag{80}$$

これから χ を消去すると

$$\begin{aligned}(E^2-m^2)\varphi&=\{\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{p}-e\boldsymbol{A})\}^2\varphi\\ &=\{(\boldsymbol{p}-e\boldsymbol{A})^2-e\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{H}\}\varphi\\ &=\{\boldsymbol{p}^2-2e\boldsymbol{p}\boldsymbol{A}+e^2\boldsymbol{A}^2-e\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{H}\}\varphi\end{aligned} \tag{81}$$

ただし div $\boldsymbol{A}=0$ となるように**ゲージ**を選んであるとする。ここから先の取り扱いは, $\boldsymbol{A}$ をどのように選ぶかというゲージの問題と関係してくる。これはどのような演算子を対角化して解くかという問題とも関係してくる。

1) 第一のゲージとして次のベクトル・ポテンシャルを選ぶ。

$$\boldsymbol{A}=\frac{1}{2}\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{r} \tag{82}$$

そうすると

$$-2e\boldsymbol{p}\boldsymbol{A}=-e\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{r}=-e\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}=-e\boldsymbol{H}\boldsymbol{L} \tag{83}$$

ゆえに,

$$(E^2-m^2)\varphi=\left\{p_z{}^2+p_x{}^2+p_y{}^2+\frac{1}{4}e^2H^2(x^2+y^2)-eH(L_z+\sigma_z)\right\}\varphi \tag{84}$$

したがってこのゲージでは p_z, L_z, σ_z などを対角化することによって固有値問題が解けることがわかる。さて

$$p_x{}^2+p_y{}^2+\frac{1}{4}e^2H^2(x^2+y^2) \tag{85}$$

は2次元振動子であって, その固有値は

$$eH(n'+1) \tag{86}$$

の形をしている。p_z, L_z, σ_z の固有値をそれぞれ p_z, m, μ と書くと

$$n'-m=2n\qquad(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots) \tag{87}$$

と書けることは2次元振動子の理論からわかる。したがって固有値は

$$E^2-m^2=p_z{}^2+eH(2n+1-\mu) \tag{88}$$

2) 第二のゲージとして次のベクトル・ポテンシャルを選ぶ。

$$A_x=A_z=0,\qquad A_y=Hx \tag{89}$$

そうすると φ の方程式は

$$(E^2-m^2)\varphi=\{\boldsymbol{p}^2+e^2H^2x^2-eH(\sigma_z+2xp_y)\}\varphi \tag{90}$$

さて今度は p_y, p_z, σ_z を対角化しよう。そして

$$\varphi=e^{i(p_yy+p_zz)}f(x) \tag{91}$$

とおくと，$f(x)$ の方程式は

$$(E^2-m^2-p_z{}^2)f=\left\{-\frac{d^2}{dx^2}+(eHx-p_y)^2-eH\sigma_z\right\}f(x) \qquad (92)$$

そこで，次の変数変換を導入する。

$$\xi=\sqrt{eH}\left(x-\frac{p_y}{eH}\right), \qquad a=\frac{E^2-m^2-p_z{}^2}{eH} \qquad (93)$$

そうすれば，f の方程式は次のように調和振動子型となる。

$$\left(-\frac{d^2}{d\xi^2}+\xi^2-\mu\right)f=af \qquad (94)$$

これから固有値は

$$a+\mu=2n+1 \qquad (95)$$

すなわち

$$E^2=m^2+p_z{}^2+eH(2n+1-\mu) \qquad (96)$$

これは(88)と同じである。したがってエネルギー準位がゲージの選び方によらないことがわかった。一般に $\boldsymbol{p}-e\boldsymbol{A}$ という形の組み合わせのみがゲージ不変であり，他の量はゲージのとり方によって保存量になったりならなかったりする。またスピン 0 の Klein-Gordon 方程式に対しては，$\mu=0$ とおくことにより同様な結果が得られることは上の導出法より明らかであろう。これらの準位は **Landau(ランダウ)準位**とよばれる構造を有する†。

1-11　負エネルギー解の物理的解釈

いままでふれることを避けてきたが，Dirac 方程式は**負エネルギー状態**に対応する解を有するので，その解を物理的にいかに解釈すべきかということは大問題である。そこで消極的な回避法から始まって，積極的な利用法に到るまでの種々な解釈を述べてみよう。

1)　**射影演算子**　静的な外場しかない場合の Dirac 方程式を考えてみよう。

$$H\psi_n=E_n\psi_n \qquad (1)$$

そうすると H は Hermite 演算子であるから直交関係が成り立つ。

$$\int\psi_n{}^\dagger(x)\psi_n(x)d^3x=\delta_{mn} \qquad (2)$$

またこれから一般に完全性の条件式を書くことができる。

---

† Landau 準位については，たとえば本シリーズ 7，金森順次郎：磁性（1969）参照のこと。

$$\sum_m \psi_m(x)_r \psi_m{}^*(y)_s = \delta_{rs}\delta^3(x-y) \qquad (x_0=y_0) \tag{3}$$

さて固有関数はEが正か負かによって2組に分類される。そして $E_n>0$ に対し

$$\Lambda_n{}^{(+)}\psi_n = \frac{H+|E_n|}{2|E_n|}\psi_n = \psi_n, \qquad \Lambda_n{}^{(-)}\psi_n = \frac{-H+|E_n|}{2|E_n|}\psi_n = 0 \tag{4}$$

という射影演算子 $\Lambda_n{}^{(+)}$, $\Lambda_n{}^{(-)}$ を導入しよう。$E_n<0$ ならばしたがって

$$\Lambda_n{}^{(-)}\psi_n = \frac{-H+|E_n|}{2|E_n|}\psi_n = \psi_n, \qquad \Lambda_n{}^{(+)}\psi_n = \frac{H+|E_n|}{2|E_n|}\psi_n = 0 \tag{5}$$

次に任意の4成分の関数 $f(x)$ に対して $\Lambda^{(\pm)}$ を次式で定義する。

$$\Lambda^{(\pm)}f(x) = \sum_n \Lambda_n{}^{(\pm)}\psi_n(x)\int \psi_n{}^\dagger(y)f(y)d^3y \tag{6}$$

そうすると，$\Lambda^{(\pm)}$ は次の関係式を満たす射影演算子である。

$$\Lambda^{(+)}\Lambda^{(+)} = \Lambda^{(+)}, \qquad \Lambda^{(-)}\Lambda^{(-)} = \Lambda^{(-)} \tag{7}$$

$$\Lambda^{(+)}\Lambda^{(-)} = \Lambda^{(-)}\Lambda^{(+)} = 0 \tag{8}$$

$$\Lambda^{(+)} + \Lambda^{(-)} = 1 \tag{9}$$

そこで，負エネルギー解を回避する方法があるかどうかを考えてみよう。一番簡単な方法は，負エネルギー解は現実に対応せず，正エネルギー解のみが自然界に実現されると考えることである。そこで

$$\Lambda^{(+)}\psi_0(x) = \psi_0(x), \qquad \Lambda^{(-)}\psi_0(x) = 0 \tag{10}$$

の初期条件で Dirac 方程式を解く。解がいつまでたっても正エネルギー状態の重ね合わせであるための条件は

$$[H,\ \Lambda^{(+)}] = 0 \tag{11}$$

であるが，この条件は定義から明らかなように満たされている。しかし外から摂動 H' が加わったらどうであろうか。負エネルギー状態が生じないための条件は

$$[H',\ \Lambda^{(+)}] = 0 \tag{12}$$

であるが，この条件は結局

$$[H',\ H] = 0 \tag{13}$$

に帰せられる。この条件は一般に満たされないので上のような回避法は結局失敗に帰する。

2) Diracの空孔理論(hole theory)　Dirac 方程式の負エネルギー解は，理論の相対論的不変性に起因する。すなわち，与えられた運動量 $\boldsymbol{p}$ に対して E の値および符号は次の2通りがある。

$$E = \pm\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2} \tag{14}$$

そこでもし正エネルギーの電子が，後に述べるような機構で，光を出して負エネルギー状態に落ちることができることになり，電子は安定ではありえなくなってしまう。古典論ではこのような困難はなかった。正エネルギーでは $E \geq m$ であり，負エネルギーでは $E \leq -m$ であるから，両者には $2m$ の隔りがあり，不連続な変化をきらう古典論では両者間の遷移は禁止されているからである。ところが量子論では，量子遷移により不連続な変化が可能であり，このようなことが大問題となるのである。この困難を除くために Dirac は次のようなだいたんな仮定を設けた。

仮定 1　$E=-m$ から $-\infty$ までのすべての負エネルギー状態が完全に満員になっている状態が**真空**である。

仮定 2　真空状態での負エネルギー電子は，電場・エネルギー・運動量・荷電等の観測可能量にいっさい貢献せず，ただ**真空からの「ずれ」**のみが観測される。

正エネルギー電子を**真空中**にもち込んだときに，それが負エネルギー状態に落ちることがないことは，仮定1と Pauli の**排他律**により保証される。次に真空状態に対して外場をかけたとしよう。そうすると一般に負エネルギー状態にある電子に遷移が起きる。たとえば，エネルギー $E=-|E|$，運動量 $\boldsymbol{p}$ の電子が正エネルギー状態に励起されたとすると，負エネルギーの**海**には孔があく。仮定2によりこの孔は真空からのずれであるから観測にかかる。そして負エネルギー電子が1個なくなったのであるから，このずれはエネルギーがふえたとして観測される。すなわち，この孔はエネルギー $E_+=-E=|E|$ をもつ。同様に，この孔は運動量 $\boldsymbol{p}_+=-\boldsymbol{p}$，荷電 $-e=|e|$ をもつ。すなわち，この孔は電子と同じ質量をもち，逆荷電の粒子として観測されるべきである。この粒子を**陽電子**とよぶ。また陽電子を電子の**反粒子**であるという。反粒子の存在は相対論的量子論に特有なことである。さてもし外場から与えられたエネルギー W が十分大きければ，すなわち陽電子のエネルギーを E_+，正エネルギー状態へ移った電子のエネルギーを E_- として

$$W=E_+ + E_- > 2m \tag{15}$$

が成り立つならば，結果として真空から正負荷電の粒子対が発生することになる。これを**対発生**とよぶ。もしもエネルギーが十分でなければ，一度正エネルギー状態に上がった電子が再び自分の残した**空孔**に落ち込んでしまう。すなわちこの場合には仮想的な対発生が生ずることになる。しかし

ながら仮想的にせよ真空が陰陽電子対を生ぜしめる能力をもつということは，真空が電媒質のように偏極を生ずる能力をもっているということを意味する。このような現象を**真空偏極**とよぶ。このように Dirac の電子論は種々の現象の存在を予言したのである。陽電子の存在は 1932 年 C. D. Anderson によって確かめられた。彼は宇宙線中に電子と質量が同じで，陽荷電の粒子を発見したのである。上に述べた仮定と Dirac 方程式とを組み合わせた理論を Dirac の**空孔理論**(hole theory)とよぶ。

すでに真空の定義でも明らかなように，Dirac 理論は初めから多体問題である。一体問題から出発したはずの Dirac 方程式が，負エネルギー解の解釈のためにいつの間にか変質して多体問題になってしまったのである。また仮定 1 と 2 とはなんとなく不自然でぎこちない。これらの点をすっきりさせるためには Dirac 場の量子化という手続きが必要である。本書ではこのような手続きなしにどこまで進めるかを調べることにして，場の量子論には立ち入らないことにする。

1-12　中心的静電場における Dirac 方程式の解

いままでは Dirac 方程式の非相対論的近似ばかりを考えてきたが，今度はこのような近似なしに厳密に解くことを考えよう。

いま中心的静電場を考え，スカラー・ポテンシャル $\varphi(r)$ を導入する。

$$E\psi=\{\boldsymbol{\alpha p}+\beta m+e\varphi(r)\}\psi$$
$$=\{\rho_1(\boldsymbol{\sigma p})+\rho_3 m+V(r)\}\psi,\qquad V(r)=e\varphi(r) \tag{1}$$

が問題の方程式である。そこで運動の恒量を調べると

1)　エネルギー

2)　角運動量　　$\boldsymbol{J}=\boldsymbol{L}+\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}$，あるいは J と J_z.

3)　パリティ　　これは 1-7 で述べたように $\psi(\boldsymbol{x})\to\beta\psi(-\boldsymbol{x})$ という変換である。

次にいままでよくやったように ψ を上下 2 成分ずつに分ける。

$$\psi=\begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix} \tag{2}$$

角運動量は偶行列とみなせるから，φ も χ も同じ J, J_z に属すると考えてよい。しかし**相対論的パリティ**は，φ と χ とを結びつける奇行列とは反可換であるから φ と χ とは逆の 3 次元的パリティに属する。

次に $\boldsymbol{J}^2$, J_z, $\boldsymbol{L}^2$ の同時固有関数である2成分の **Pauli スピノル**を導入する。$\boldsymbol{L}^2$ は一般の問題では量子数ではないが，この問題ではパリティ保存のために量子数に選べるのである。すなわち j を与えたときに $l=j+\frac{1}{2}$ と $l=j-\frac{1}{2}$ とは逆のパリティに属するので，パリティを決めるとどちらか一方に決まってしまうからである。

$$j=l+\frac{1}{2} \qquad \Phi_{j,l,m}^{(+)}=\frac{1}{\sqrt{2l+1}}\begin{pmatrix}\sqrt{l+m+\frac{1}{2}}\,Y_l^{m-\frac{1}{2}}\\ \sqrt{l-m+\frac{1}{2}}\,Y_l^{m+\frac{1}{2}}\end{pmatrix} \tag{3}$$

$$j=l'-\frac{1}{2} \qquad \Phi_{j,l',m}^{(-)}=\frac{1}{\sqrt{2l'+1}}\begin{pmatrix}\sqrt{l'-m+\frac{1}{2}}\,Y_l^{m-\frac{1}{2}}\\ -\sqrt{l'+m+\frac{1}{2}}\,Y_l^{m+\frac{1}{2}}\end{pmatrix} \tag{4}$$

これらの関数の3次元的パリティは $(-1)^l$ で与えられる。これらの波動関数は，軌道角運動量とスピンとを合成したものの固有関数である。ここで今後のためにもっと便利な記号を導入する。

$$\Phi\left(j,\,m,\,l=j+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{2(j+1)}}\begin{pmatrix}\sqrt{j+1-m}\,Y_{j+\frac{1}{2}}^{m-\frac{1}{2}}\\ -\sqrt{j+1+m}\,Y_{j+\frac{1}{2}}^{m+\frac{1}{2}}\end{pmatrix} \tag{5}$$

$$\Phi\left(j,\,m,\,l=j-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{2j}}\begin{pmatrix}\sqrt{j+m}\,Y_{j-\frac{1}{2}}^{m-\frac{1}{2}}\\ \sqrt{j-m}\,Y_{j-\frac{1}{2}}^{m+\frac{1}{2}}\end{pmatrix} \tag{6}$$

こうすれば，4成分の Dirac スピノルで量子数 j, m をもち，相対論的パリティ $(-1)^{j\pm\frac{1}{2}}$ に対応するものは次の形に書ける。

$$\psi=\begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f(r)\Phi\left(j,\,m,\,j\pm\frac{1}{2}\right)\\ -ig(r)\Phi\left(j,\,m,\,j\mp\frac{1}{2}\right)\end{pmatrix} \tag{7}$$

そこでこの形を方程式(1)，あるいは

$$\begin{aligned}E\varphi&=\frac{1}{i}\boldsymbol{\sigma}\nabla\chi+m\varphi+V\varphi\\ E\chi&=\frac{1}{i}\boldsymbol{\sigma}\nabla\varphi-m\chi+V\chi\end{aligned} \tag{8}$$

に代入し，さらに

$$\frac{\boldsymbol{\sigma r}}{r}\Phi\left(j,\ m,\ j\pm\frac{1}{2}\right)=\Phi\left(j,\ m,\ j\mp\frac{1}{2}\right) \tag{9}$$

を用いると，f と g とに対する方程式が得られる。(8)に対して(9)を利用しようとすると少し工夫がいる。すなわち，

$$(\boldsymbol{\sigma a})(\boldsymbol{\sigma b})=\boldsymbol{ab}+i\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$$

を用いて

$$\begin{aligned} i\boldsymbol{\sigma p}&=i\frac{\boldsymbol{\sigma r}}{r^2}(\boldsymbol{\sigma r})(\boldsymbol{\sigma p}) \\ &=i\frac{\boldsymbol{\sigma r}}{r^2}\{\boldsymbol{rp}+i\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p})\} \\ &=\frac{\boldsymbol{\sigma r}}{r}\left\{\frac{\partial}{\partial r}-\frac{1}{r}(\boldsymbol{\sigma L})\right\} \end{aligned} \tag{10}$$

ところでこの $\boldsymbol{\sigma L}$ を Φ に作用させると

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\sigma L})\Phi\left(j,\ m,\ j\pm\frac{1}{2}\right)&=\begin{Bmatrix}-\left(j+\frac{3}{2}\right)\\ j-\frac{1}{2}\end{Bmatrix}\Phi\left(j,\ m,\ j\pm\frac{1}{2}\right) \\ &\equiv-(k+1)\Phi\left(j,\ m,\ j\pm\frac{1}{2}\right) \end{aligned} \tag{11}$$

ただし $l=j\pm\frac{1}{2}$ に対して $k=\pm\left(j+\frac{1}{2}\right)$ で定義されている。さて問題の方程式は

$$\begin{aligned} (E-m-V)f(r)\Phi\left(j,\ m,\ j\pm\frac{1}{2}\right)&=-\boldsymbol{\sigma}\nabla\left\{g(r)\Phi\left(j,\ m,\ j\mp\frac{1}{2}\right)\right\} \\ (E+m-V)g(r)\Phi\left(j,\ m,\ j\mp\frac{1}{2}\right)&=\boldsymbol{\sigma}\nabla\left\{f(r)\Phi\left(j,\ m,\ j\pm\frac{1}{2}\right)\right\} \end{aligned} \tag{12}$$

公式(10)と(11)とを用いるとこの方程式は次のようになる。

$$\begin{aligned} \{E-m-V(r)\}f(r)+\left\{\frac{d}{dr}+(1-k)\frac{1}{r}\right\}g(r)=0 \\ \{E+m-V(r)\}g(r)-\left\{\frac{d}{dr}+(1+k)\frac{1}{r}\right\}f(r)=0 \end{aligned} \tag{13}$$

次に動径波動関数として新しい組を導入する。

$$\begin{pmatrix}f(r)\\ g(r)\end{pmatrix}=\frac{1}{r}\begin{pmatrix}u(r)\\ v(r)\end{pmatrix} \tag{14}$$

こうすると，$u(r)$ と $v(r)$ とに対する方程式は次のようになる。

$$\begin{aligned} \{E-m-V(r)\}u(r)+\left(\frac{d}{dr}-\frac{k}{r}\right)v(r)=0 \\ \{E+m-V(r)\}v(r)-\left(\frac{d}{dr}+\frac{k}{r}\right)u(r)=0 \end{aligned} \tag{15}$$

Coulomb ポテンシャルに対する Dirac 方程式 こうして角変数，スピン変数を分離した動径部分のみに関する方程式が得られた。そこで問題を特殊化し，原子核のまわりを電子がまわる場合を考えると，

$$V(r)=-\frac{Ze^2}{r} \tag{16}$$

であるから，上の方程式系は

$$\begin{aligned}\left(E-m+\frac{Ze^2}{r}\right)u(r)+\left(\frac{d}{dr}-\frac{k}{r}\right)v(r)=0\\ \left(E+m+\frac{Ze^2}{r}\right)v(r)-\left(\frac{d}{dr}+\frac{k}{r}\right)u(r)=0\end{aligned} \tag{17}$$

この方程式の解の原点付近での様子を調べるために次の展開を考える。

$$\begin{aligned}u=r^{\gamma}(a_0+a_1r+\cdots)\\ v=r^{\gamma}(b_0+b_1r+\cdots)\end{aligned} \tag{18}$$

この展開を(17)に代入すると**指示方程式**(indicial equation)が得られる。

$$\begin{aligned}Ze^2b_0-(\gamma+k)a_0=0\\ Ze^2a_0+(\gamma-k)b_0=0\end{aligned} \tag{19}$$

したがってこれが $a_0=b_0=0$ 以外の解をもつためには

$$\gamma^2=k^2-(Ze^2)^2 \tag{20}$$

さて原点で特異点をもたないのは $\gamma>0$ の方の解であるから

$$\gamma=\sqrt{k^2-Z^2e^4} \tag{21}$$

次に $r\to\infty$ での解の様子を調べる。束縛状態に対して $E^2=m^2-\lambda^2$ とおくと

$$u,\ v\propto e^{\pm\lambda r} \qquad (r\to\infty) \tag{22}$$

規格化ができるためにはもちろん $e^{-\lambda r}$ の方をとらなければならない。すなわち $r\to\infty$ では，漸近的に方程式(17)は次のものに帰着する。

$$\left.\begin{aligned}(E-m)u+\frac{dv}{dr}=0\\ (E+m)v-\frac{du}{dr}=0\end{aligned}\right. \qquad (r\to\infty) \tag{23}$$

この方程式で，u も v も $r\to\infty$ で $e^{-\lambda r}$ になる解をとれば

$$\lim_{r\to\infty}\frac{v}{u}=-\frac{\lambda}{E+m}=-\sqrt{\frac{m-E}{m+E}} \tag{24}$$

そこで，$r\to 0$, $r\to\infty$ での u, v のふるまいを考慮して

$$u=r^{\gamma}e^{-\lambda r}w_1, \qquad v=-r^{\gamma}e^{-\lambda r}w_2\left(\frac{\lambda}{E+m}\right) \tag{25}$$

とおくと，w_1 と w_2 とに対する方程式は次のようになる。

$$\begin{aligned}&\frac{dw_1}{dr}-\lambda(w_1-w_2)+\left(\frac{\gamma+k}{r}\right)w_1+\left(\frac{Ze^2\lambda}{E+m}\right)\frac{w_2}{r}=0\\&\frac{dw_2}{dr}+\lambda(w_1-w_2)+\left(\frac{\gamma-k}{r}\right)w_2+\left(\frac{Ze^2\lambda}{E-m}\right)\frac{w_1}{r}=0\end{aligned}\tag{26}$$

次に，$x=2\lambda r$ という変数を導入し，さらに

$$A=\frac{Ze^2\lambda}{m+E},\qquad B=\frac{Ze^2\lambda}{m-E},\qquad AB=k^2-\gamma^2\tag{27}$$

とおくと，(26)の方程式は

$$\begin{aligned}&\frac{dw_1}{dx}-\frac{1}{2}(w_1-w_2)+\frac{1}{x}\{(\gamma+k)w_1+Aw_2\}=0\\&\frac{dw_2}{dx}+\frac{1}{2}(w_1-w_2)+\frac{1}{x}\{-Bw_1+(\gamma-k)w_2\}=0\end{aligned}\tag{28}$$

この方程式を解くために，次の級数展開を導入する。

$$w_1=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n,\qquad w_2=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n\tag{29}$$

こうすると，係数の間に次の**漸化式**が得られる。

$$\begin{aligned}&na_n-\frac{1}{2}(a_{n-1}-b_{n-1})+(\gamma+k)a_n+Ab_n=0\\&nb_n+\frac{1}{2}(a_{n-1}-b_{n-1})-Ba_n+(\gamma-k)b_n=0\end{aligned}\tag{30}$$

この漸化式を解くために，２式を加えると

$$\frac{a_n}{n+A+\gamma-k}=\frac{-b_n}{n-B+\gamma+k}\equiv c_n\tag{31}$$

ここで元の式(30)に戻って

$$\frac{c_n}{c_{n-1}}=\frac{n+(\gamma-1)+(A-B)/2}{n(n+2\gamma)}\tag{32}$$

そこで $\alpha\equiv\gamma+(A-B)/2,\ \beta\equiv1+2\gamma$ とおくと，上の解は

$$\frac{c_n}{c_{n-1}}=\frac{n-1+\alpha}{n(n-1+\beta)}\tag{33}$$

この関係はちょうど**合流型超幾何級数**に対するものと同じである。つまり

$$\frac{1}{c_0}\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n={}_1F_1(\alpha;\beta;x)=1+\frac{\alpha}{\beta\cdot1}x+\frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta(\beta+1)\cdot1\cdot2}x^2+\cdots\tag{34}$$

そこで，w_1 と w_2 とを ${}_1F_1(\alpha;\beta;x)$ で表わすことを考えてみよう。

$$\begin{aligned}w_1&=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}(n+A+\gamma-k)c_nx^n\\&=x^{-(A+\gamma-k)+1}\frac{d}{dx}\left(x^{A+\gamma-k}\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n\right)\end{aligned}$$

$$=x^{1-(A+\gamma-k)}\frac{d}{dx}\{x^{A+\gamma-k}{}_1F_1(\alpha\,;\,\beta\,;\,x)\}c_0 \tag{35}$$

同様に

$$w_2=-x^{1-(\gamma+k-B)}\frac{d}{dx}\{x^{\gamma+k-B}{}_1F_1(\alpha\,;\,\beta\,;\,x)\}c_0 \tag{36}$$

Coulomb ポテンシャルに対する束縛状態のエネルギー準位　さて n が大きくなると，$c_n/c_{n-1}\sim 1/n$ となり，したがって ${}_1F_1$ は $e^x=e^{2\lambda r}$ のようにふるまって，$r\to\infty$ で 0 になってくれない。これを避けられる唯一の方法は，${}_1F_1$ が有限級数で表わされるように，種々のパラメーターを選ぶことである。つまり

$$\alpha=-n' \qquad (n'=0,\,1,\,2,\,\cdots) \tag{37}$$

と選べば，${}_1F_1$ は n' 次の多項式になり，したがって $u,\,v$ は $r\to\infty$ において指数関数的に 0 に近づくことになる。(37)を元のパラメーターで表わすと

$$\gamma+\frac{1}{2}(A-B)=-n' \tag{38}$$

すなわち

$$\gamma+\frac{Ze^2}{2}\sqrt{m^2-E^2}\left(\frac{1}{m+E}-\frac{1}{m-E}\right)=-n' \tag{39}$$

これを E に関する方程式とみなして解けば

$$E=\frac{m}{\sqrt{1+\left(\dfrac{Ze^2}{\gamma+n'}\right)^2}},\qquad \text{ただし}\quad \gamma=\sqrt{\left(j+\frac{1}{2}\right)^2-Z^2e^4}=\sqrt{k^2-Z^2e^4} \tag{40}$$

したがって n' と j とが等しければ，パリティによらずエネルギー準位は等しくなる。逆に l が同じでも j が異なるならば準位は分裂する。そこで Bohr の主量子数 n に対応するものは

$$n=n'+|k|=n'+j+\frac{1}{2} \tag{41}$$

であり，n と j とで E を表わせば

$$E_{n,j}=\frac{m}{\sqrt{1+\left(\dfrac{Ze^2}{n-\left(j+\frac{1}{2}\right)+\sqrt{\left(j+\frac{1}{2}\right)^2-Z^2e^4}}\right)^2}} \tag{42}$$

これが Dirac による水素原子または水素原子的な場合の準位公式である。$Ze^2\ll 1$ であれば，この公式は Bohr の公式と一致する。

さて縮退している準位を括弧で囲うと

$n=1$ $1s_{1/2}$
$n=2$ $(2s_{1/2},\ 2p_{1/2}),\ 2p_{3/2}$
$n=3$ $(3s_{1/2},\ 3p_{1/2}),\ (3p_{3/2},\ 3d_{3/2}),\ 3d_{5/2}$
$\vdots$

括弧の中には要するにパリティ二重項が入り，縮退しているのは結局この二重項だけである。また各 n に対して一番右の項は縮退していない。これは $n'=0$ に対応し，したがって $\gamma=\frac{1}{2}(B-A)$ となるので，このときには

$$w_1=w_2=c_0\left\{\frac{1}{2}(A+B)-k\right\} \tag{43}$$

しかし $\frac{1}{2}(A+B)=|k|$ であるから［これは(42)を使って確かめられる］

$$w_1=w_2=c_0(|k|-k) \tag{44}$$

となり，負の k しか許されなくなる。このとき $k=-\left(j+\frac{1}{2}\right)$，パリティは $(-1)^{j-\frac{1}{2}}$ となる。非相対論的近似では，j によってエネルギー準位が分かれないから同じ n に対するすべての準位は縮退している。

不確定性原理と水素原子 非相対論的量子力学では，基底状態のエネルギーは Bohr の公式により

$$E_0=-\frac{Z^2e^4m}{2} \tag{45}$$

で与えられ，Z の値に制限はなかった。ところが相対論的理論では

$$\gamma=\sqrt{\left(j+\frac{1}{2}\right)^2-Z^2e^4}, \qquad e^2\simeq 1/137$$

であるから，$j=1/2$ とすると

$$Z<137.037\cdots \tag{46}$$

という制限がついてくる。Z がそれよりも大きい整数になると，すなわち $Z>137$ になると解が存在しない。幸いにして現実にはこんなに原子番号の大きい原子核は存在しないが，なぜこのような事情が生じたかを不確定性原理を用いて，直観的に理解できるかどうか試みてみよう。

非相対論的量子論における水素原子，またはその一般化 $(Z\geq 1)$ を考えると

$$H=\frac{\boldsymbol{p}^2}{2m}-\frac{Ze^2}{r} \tag{47}$$

この基底状態のエネルギー準位を定めるのに荒っぽい評価法を用いる。すなわち，$\boldsymbol{p}^2/2m$ をその不確定度 $(\Delta p_r)^2/2m$ でおきかえ，Ze^2/r も $Ze^2/\Delta r$

でおきかえ

$$\Delta p_r \Delta r \gtrsim 1 \tag{48}$$

を用いる。$1/\Delta r \sim \Delta p_r$ として(47)に代入すると

$$H \sim \frac{(\Delta p_r)^2}{2m} - Ze^2(\Delta p_r) \tag{49}$$

こうすると H は，$\Delta p_r \sim Ze^2 m$ で極小値をとる。すなわち $v \sim Ze^2 = Z\alpha$ に対して

$$E_0 = \min H \sim -\frac{Z^2 e^4 m}{2} \tag{50}$$

これは偶然，数係数まで Bohr の公式と一致する。次に Dirac 理論では

$$H = \boldsymbol{\alpha p} + \beta m - \frac{Ze^2}{r} \tag{51}$$

ここで $\boldsymbol{\alpha}$, β を $\boldsymbol{v}$, $\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2}$ でおきかえると［1-9 の(45), (46)参照］,

$$H \sim \sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2} - \frac{Ze^2}{r} \sim \sqrt{(\Delta p_r)^2 + m^2} - Ze^2(\Delta p_r) \tag{52}$$

この式は $Ze^2 < 1$ ならば極小値が存在し，$v \sim Ze^2$ のときに

$$E_0 \sim m\sqrt{1-(Ze^2)^2} \tag{53}$$

が極小値となる。これも偶然，数係数まで Dirac の公式と一致している。もし $Ze^2 > 1$ となれば，$v > 1$ となり相対論に反することになる。このときに(52)は，Δp_r の単調減少関数となり，安定な解はなくなる。以上で，なぜこのように複雑な計算なしに，$Ze^2 > 1$ のときに相対論的方程式の解がなくなるかを直観的に理解できたと思う。

1-13 断面積の定義

前節では束縛状態についての議論を展開した。しかし**散乱状態**に関する議論もたいせつである。散乱に関する一般論は **4.** 章で展開されるが，ここでは散乱に関する必要最少限の事柄を述べておく。散乱問題で実験の対象となるのは**断面積**(cross section)であるから，この定義から始めよう。

入射してくる粒子線の強度が，単位時間あたりその粒子線に垂直な単位面積を N 個ずつ通過するように準備されているとする。この場合 f という最終状態あるいはチャンネルに，単位時間あたり散乱される粒子の数を $N\sigma_f$ とすると，σ_f が f という状態あるいはチャンネルへの断面積とよばれる。

たとえば，中心力の場によりある粒子線が散乱される問題を考えてみよう。f として散乱角 θ のある微小立体角 $d\Omega$ へ散乱される状態を考えると，Schrödinger 方程式の解の漸近形を求めることから始めなければならない。その結果として

$$\psi=e^{ikz}+\frac{e^{ikr}}{r}f(\theta)+O\left(\frac{1}{r^2}\right) \tag{1}$$

が得られたとする。ただし粒子線の入射方向を z 軸に選び，入射波の波数，または運動量の絶対値を k としている。第一項は**入射波**を表わし，第二項が**外向きの球面波**で散乱される波を表わしている。入射波 e^{ikz} は単位体積あたり粒子が1個あるような規格化に相当する。入射波の速度を $v=k/m$ とすると，上の定義から $N=v$ となる。もっと詳しくは e^{ikz} を 1-2 の(14)，すなわち

$$\boldsymbol{j}=\frac{i}{2m}(\nabla\psi^*\cdot\psi-\psi^*\cdot\nabla\psi) \tag{2}$$

に代入すると，$j_z=k/m=v$ が求められる。したがって $N=v$ となる。同様な議論は Dirac 粒子に対しても適用される。このときには，入射波は

$$e^{ikz} \longrightarrow u(p_i)e^{ikz}, \qquad ただし\quad u^\dagger(p_i)u(p_i)=1 \tag{3}$$

で与えられる。この場合 $\boldsymbol{j}$ は 1-5 で与えられたように

$$\boldsymbol{j}=\psi^\dagger\boldsymbol{\alpha}\psi \tag{4}$$

で与えられるが，1-9 の(41)で与えられたように再び $j_z=v$ となる。

次に散乱波 $(e^{ikr}/r)f(\theta)$ を(2)に代入し，動径方向の成分をとると

$$\begin{aligned} j_r&=\frac{i}{2m}\left(\frac{\partial\psi^*}{\partial r}\psi-\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\\ &=\frac{k}{m}\frac{|f(\theta)|^2}{r^2}+O\left(\frac{1}{r^3}\right)\\ &\sim N\frac{|f(\theta)|^2}{r^2} \end{aligned} \tag{5}$$

Dirac 方程式の場合にも同様な結果が得られる。これについては次節で議論をする。さて(5)から $d\Omega$ という立体角に散乱される断面積 $d\sigma_f$ は，散乱中心から大きな半径 r の球面をとり，その球面上の $d\Omega$ に対応する表面積 dS に散乱された粒子を数えるとすると

$$N\,d\sigma_f=\lim_{r\to\infty}j_r\,dS=\lim_{r\to\infty}r^2 j_r\,d\Omega=N|f(\theta)|^2\,d\Omega \tag{6}$$

ゆえにいわゆる**微分散乱断面積**が次式で得られる†。

---

† この式の具体的な応用については，たとえば本シリーズ 10，高柳和夫：電子・原子・分子の衝突 (1972) 参照のこと。

$$\frac{d\sigma_f}{d\Omega}=|f(\theta)|^2 \tag{7}$$

散乱状態の波動関数の漸近形が(1)の形で書けること，**散乱振幅** $f(\theta)$ をいかにして求めるか等の一般論については **4** 章で改めて詳しく論ずることにする。

ここで注意すべきことは，断面積の定義は出入りする粒子の個数を用いて定義してあることである。Schrödinger 方程式，または Dirac 方程式の波動関数は確率概念を通して粒子性と結びついているから，断面積を計算することができる。しかし確率概念と結びついていない波動の散乱に対しては，どうやって断面積を計算したらよいであろうか。正しくは波動場を量子化して粒子性を出し，それを用いて断面積を計算すべきである。しかし古典的波動場に対しても漸近形(1)を出し，(7)によって微分断面積を機械的に計算することによって偶然正しい答が得られることがある。本書では電磁場以外は量子化をしないので，他の波動場に対してはこのような方法で断面積を計算する。たとえば 演習問題 1. の 8. にあるスピン 0 の粒子の Coulomb 場による散乱の問題がそうである。この問題では入射波の強度は粒子の流れではなくて電流密度で定義したことになっていることは **1-4** の議論から明らかである。しかしスカラー場を量子化すれば，両者は比例しているので，これが結局量子化せずに断面積の出せる理由である。また後に **3-4** 節で，古典的電磁波の散乱を同様な方法で取り扱う。このときにも似たような事情があり，入射波と散乱波との間に振動数の変化がなければ，結局陽には書かれていないが，入射波の強度をエネルギーの流れ，すなわち Poynting ベクトルを用いて定義したことになっている。そして振動数が散乱の前後で変化しないことから，この量は結局入射してくる光子の個数に比例していることが，場の量子論から結論づけられる。

場の量子論とは結局波動場に粒子性を付与する手続きであるが，そもそも量子力学を展開した動機の一つが，粒子性と波動性という二重性をいかにして説明するかという問題であった。したがって場の量子論を考えない限り，量子力学は論理的に閉じた体系をなさないのである。本書ではこの必要性の最も高い電磁場に対してだけ量子化を導入するが，電子に対しては確率的解釈というわゆる第一量子化だけですませておく。これは第二量子化を軽視しているのではなく，むしろ場の量子化，あるいは第二量子

化を行なわないとどのような困った点が出てくるかを浮き彫りにしてその重要性を強調したいからである。まがりなりにもこのようなことができるのは確率的解釈の通用する Fermi 粒子に対してだけである。

1-14 外場による Dirac 粒子の散乱

すでに Dirac 方程式に対する束縛状態の問題を調べたが，今度は散乱問題を考える。Coulomb 場に対しては厳密解が求められるが，複雑なのでここではもっぱら Born 近似を考えよう。またこの問題を調べるにあたって **1-11** で導入した Dirac の仮定を無視して，散乱の中間状態では負エネルギー状態へもいかれるとして問題を取り扱う。本来ならばすべての負エネルギー状態は占められているので，Pauli の**排他律**により，このような遷移は禁止されているはずであるが，この節の取り扱いでは，負エネルギー状態は全く空いているとする。このような理論を**一電子理論**(single electron theory)とよぶ。簡単な問題では両者の答が一致することが，場の量子論を用いて証明されているので我々はこの簡単な方法を選ぶことにする。なお Dirac の仮定をとり入れたときに，本節の議論がいかに変更を受けるかについては，**1-16** において場の量子論によらないもっと直観的な Feynman(ファインマン)の方法によって論ずることにする。

さて外場のある場合の Dirac 方程式は

$$\{\gamma_\lambda(\partial_\lambda - ieA_\lambda) + m\}\psi = 0 \tag{1}$$

この方程式は時間微分につき 1 階であるから**初期値問題**を設定することができる。このために便利な**遅延グリーン関数**(retarded Green's function)を考える。

$$\Delta_{\mathrm{ret}}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\lim_{\varepsilon\to+0}\int d^4p \frac{e^{ipx}}{\boldsymbol{p}^2 + m^2 - (p_0 + i\varepsilon)^2} \tag{2}$$

ただし $d^4p = dp_1\,dp_2\,dp_3\,dp_0$， $px = p_\mu x_\mu = \boldsymbol{p}\boldsymbol{x} - p_0 x_0$ である。この関数は次のような諸性質を有する。

1) $\Delta_{\mathrm{ret}}(x)$ は **proper な Lorentz 変換**に対して不変である。すなわち

$$x_\mu' = \sum_\nu a_{\mu\nu} x_\nu \tag{3}$$

が proper な Lorentz 変換ならば

$$\Delta_{\mathrm{ret}}(x') = \Delta_{\mathrm{ret}}(x) \tag{4}$$

である。

（証明）(2)において d^4p, px はいずれも Lorentz 変換に対して不変であり，かつ

$$\frac{1}{\boldsymbol{p}^2+m^2-(p_0+i\varepsilon)^2}=\frac{P}{\boldsymbol{p}^2-p_0{}^2+m^2}+i\pi\varepsilon(p_0)\delta(\boldsymbol{p}^2-p_0{}^2+m^2) \quad (5)$$

ただし，P は Cauchy（コーシー）の主値を意味し，$\varepsilon(p_0)$ は次式で定義される。

$$\varepsilon(p_0)=\frac{p_0}{|p_0|} \quad (6)$$

$\boldsymbol{p}^2-p_0{}^2+m^2=p^2+m^2$ は Lorentz 不変である。問題となるのは $\varepsilon(p_0)$ だけであるが，これには $\delta(p^2+m^2)$ が乗ぜられており，p が時間的(time-like)ベクトルのときのみを考えればよい。このとき p_0 の符号は proper な Lorentz 変換に対して変わらない。したがって(2)で定義される $\Delta_{\mathrm{ret}}(x)$ は x の proper な Lorentz 変換に対して不変である。

2)　$K_x\Delta_{\mathrm{ret}}(x)=(\Box_x-m^2)\Delta_{\mathrm{ret}}(x)=-\delta^4(x) \quad (7)$

（証明）K_x は **Klein-Gordon 演算子**とよばれ，$\Box_x-m^2$ で定義される。$\Box_x$ は **1-3** の(15)で定義されるが，添字 x はどの変数に作用するかをはっきりと書いたものである。さて(2)の積分表示から

$$K_x\Delta_{\mathrm{ret}}(x)=-\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4p\frac{p^2+m^2}{p^2+m^2}e^{ipx}=-\delta^4(x)$$

3)　x が空間的(space-like)ベクトルならば

$$\Delta_{\mathrm{ret}}(x)=0 \quad (8)$$

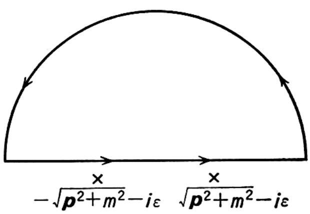
（証明）x が空間的であるから，x の方向を x_1 軸に選べば

$$\Delta_{\mathrm{ret}}(x)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4p\frac{e^{ip_1x_1}}{\boldsymbol{p}^2+m^2-(p_0+i\varepsilon)^2} \quad (9)$$

まず p_0 につき積分すると，**Cauchy の定理**により

$$\int dp_0\frac{1}{\boldsymbol{p}^2+m^2-(p_0+i\varepsilon)^2}=0 \quad (10)$$

ただし積分路として 1·1 図に示したものを選んだ。



1·1 図　複素 p_0 平面における積分路と極の位置

4)　x が時間的だが，$x_0<0$ ならば

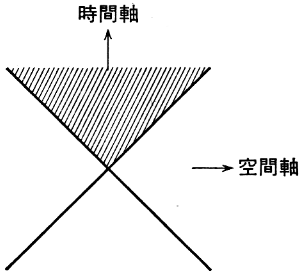
$$\Delta_{\mathrm{ret}}(x)=0 \quad (11)$$

（証明）$-x$ の方向を時間軸の方向に選べば

$$\Delta_{\text{ret}}(x)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4p\frac{e^{ip_0|x_0|}}{\boldsymbol{p}^2+m^2-(p_0+i\varepsilon)^2} \tag{12}$$

ただし $px=-p_0x_0=p_0|x_0|$ を用いている。再び p_0 について積分し，1·1 図の積分路を選ぶ。$\text{Im}\,p_0\to+\infty$ に対しては指数関数は 0 になるから，半円からの寄与は消えてしまうので，再び Cauchy の定理によりこの積分は 0 となる。

3) と 4) とを組み合わせてわかることは，$\Delta_{\text{ret}}(x)$ が 0 にならないのは**未来光円錐**(forward lightcone) の内側だけであるということである。



1·2 図 影のついている部分が未来光円錐

外場のない場合の解 散乱問題を論ずる場合は，波動関数を入射波の部分と散乱波の部分とに分けて考える。外場あるいは散乱中心がないときには入射波だけが素通りする。我々はまず入射波について考えてみることにしよう。時刻 t_0 において

$$\psi=\psi_{\text{in}}(\boldsymbol{x}) \tag{13}$$

という波を準備したとしよう。この波の時間的発展は次式で記述される。

$$\psi(\boldsymbol{x},t)=e^{-iH_0(t-t_0)}\psi_{\text{in}}(\boldsymbol{x}) \tag{14}$$

あるいはもっと詳しく書くと，ψ_{in} を H_0 の固有関数に展開したときに

$$\psi_{\text{in}}(\boldsymbol{x})=\sum_n c_n\psi_n(\boldsymbol{x}) \tag{15}$$

と書けたとすると

$$\psi(\boldsymbol{x},t)=\sum_n c_n e^{-iE_n(t-t_0)}\psi_n(\boldsymbol{x}) \tag{16}$$

そこで 4 次元的な入射波 $\psi_{\text{in}}(x)$ を次式で定義する。これは(14)と同じものである。

$$\psi_{\text{in}}(x)=e^{-iH_0(t-t_0)}\psi_{\text{in}}(\boldsymbol{x}) \tag{17}$$

こうすると，この入射波は自由な場合の波動方程式を満たす。

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi_{\text{in}}(x)=H_0\psi_{\text{in}}(x) \tag{18}$$

外場のある場合の散乱の積分方程式 外場のない場合の入射波を $\psi_{\text{in}}(x)=\psi_{\text{in}}(\boldsymbol{x},t)$ で表わす。外場がある場合には，ψ は入射波と散乱波とから成り立つから

$$\psi=\psi_{\text{in}}+\psi_{\text{scatt}} \tag{19}$$

と書くことができる。ただし ψ_{scatt} は散乱波を表わしている。問題は ψ_{in} を与えたときに，ψ_{scatt} を決定することである。方程式(1)を次のように書く。

$$\left(\gamma_\lambda\frac{\partial}{\partial x_\lambda}+m\right)\psi=\left(\gamma_\lambda\frac{\partial}{\partial x_\lambda}+m\right)\psi_{\text{scatt}}$$
$$=ie\gamma_\lambda A_\lambda\psi \tag{20}$$

ψ_{in} は自由な Dirac 方程式(18)を満たすから，左辺からはなくなってしまう。この方程式を積分するために

$$S_{\text{ret}}(x)=\left(\gamma_\lambda\frac{\partial}{\partial x_\lambda}-m\right)\Delta_{\text{ret}}(x) \tag{21}$$

を導入する。そうすると(20)の形式的解は

$$\psi_{\text{scatt}}(x)=-\int d^4x' S_{\text{ret}}(x-x')\{ie\gamma_\lambda A_\lambda(x')\}\psi(x') \tag{22}$$

なぜならば

$$\left(\gamma_\lambda\frac{\partial}{\partial x_\lambda}+m\right)S_{\text{ret}}(x)=-\delta^4(x) \tag{23}$$

となるので，(22)から(20)を導き出せるからである。さらに t_0 以前では A_λ が 0 であったとすると，(4)の性質により t_0 以前では $\psi_{\text{scatt}}=0$ も証明できる。これは**因果性の条件**であるが，(22)の積分はこの性質を満たしていることになる。したがって ψ 自身は次の積分方程式を満たすことになる。

$$\psi(x)=\psi_{\text{in}}(x)-ie\int d^4x' S_{\text{ret}}(x-x')\gamma_\lambda A_\lambda(x')\psi(x') \tag{24}$$

この積分方程式から元の微分方程式(1)，あるいは(20)が導き出せるが，微分方程式を満たすということのほかに境界条件がすでにとり入れられている。この境界条件は上に述べた因果性の条件である。この方程式は散乱問題を議論する出発点である。しかしこの方程式は**一電子理論**に基づいたものであって，負エネルギー電子の**海**の影響は入っていない。

静外場の場合の散乱の積分方程式 外場が時間によらない場合には，4 次元の積分方程式(24)を 3 次元の積分方程式にすることができる。この場合にはエネルギーは保存量であるから

$$\psi_{\text{in}}(x)=e^{-iEt}\psi_{\text{in}}(\boldsymbol{x}),\qquad \psi(x)=e^{-iEt}\psi(\boldsymbol{x}) \tag{25}$$

のように時間変数を分離することができる。ただし $E=\sqrt{m^2+k^2}$ とおけるとする。(25)を積分方程式(24)に代入すると

$$\psi(\boldsymbol{x})=\psi_{\text{in}}(\boldsymbol{x})-ie\int d^3x'\left\{\int dt' S_{\text{ret}}(x-x')e^{iE(t-t')}\right\}\gamma_\lambda A_\lambda(\boldsymbol{x})\psi(\boldsymbol{x}) \tag{26}$$

そこで $\varDelta_{\mathrm{ret}}$ の積分表示を用いると

$$S_{\mathrm{ret}}(x-x')=\left(\gamma_\lambda\frac{\partial}{\partial x_\lambda}-m\right)\varDelta_{\mathrm{ret}}(x-x')$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4p(ip_\lambda\gamma_\lambda-m)\frac{e^{i\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')-ip_0(t-t')}}{\boldsymbol{p}^2+m^2-(p_0+i\varepsilon)^2} \quad (27)$$

ゆえに

$$\int dt' S_{\mathrm{ret}}(x-x')e^{iE(t-t')}$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^4p(i\boldsymbol{p}\boldsymbol{\gamma}-E\gamma_4-m)\frac{e^{i\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')}}{\boldsymbol{p}^2+m^2-(p_0+i\varepsilon)^2}\delta(p_0-E)$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3p(i\boldsymbol{p}\boldsymbol{\gamma}-E\gamma_4-m)\frac{e^{i\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')}}{\boldsymbol{p}^2+m^2-(E+i\varepsilon)^2}$$

さて $\boldsymbol{p}^2+m^2-(E+i\varepsilon)^2=\boldsymbol{p}^2+m^2-E^2-i\varepsilon=\boldsymbol{p}^2-k^2-i\varepsilon$ $(E>0)$ であるから，上の式は

$$\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3p(i\boldsymbol{p}\boldsymbol{\gamma}-E\gamma_4-m)\frac{e^{i\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')}}{\boldsymbol{p}^2-k^2-i\varepsilon}$$
$$=(\boldsymbol{\gamma}\nabla-E\gamma_4-m)\left\{\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3p\frac{e^{i\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')}}{\boldsymbol{p}^2-k^2-i\varepsilon}\right\}$$

ここで再び Cauchy の定理を用いて計算すると，括弧の中は

$$\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3p\frac{e^{i\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')}}{\boldsymbol{p}^2-k^2-i\varepsilon}=\frac{1}{4\pi}\frac{e^{ik|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} \quad (28)$$

となるから，3次元の積分方程式は

$$\psi(\boldsymbol{x})=\psi_{\mathrm{in}}(\boldsymbol{x})-\frac{ie}{4\pi}\int d^3x'(\boldsymbol{\gamma}\nabla-E\gamma_4-m)\frac{e^{ik|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\gamma_\lambda A_\lambda(\boldsymbol{x}')\psi(\boldsymbol{x}') \quad (29)$$

ただし，$H_0\psi_{\mathrm{in}}(\boldsymbol{x})=E\psi_{\mathrm{in}}(\boldsymbol{x})$ としている。そこで $\psi_{\mathrm{in}}(\boldsymbol{x})$ として平面波をとろう。

$$\psi_{\mathrm{in}}(\boldsymbol{x})=u(k_i)e^{ikz}, \qquad u^\dagger(k_i)u(k_i)=1 \quad (30)$$

次に(29)で $|\boldsymbol{x}|$ が大きいときの $\psi(\boldsymbol{x})$ の漸近形を求めてみよう。

$$\psi(\boldsymbol{x})\sim u(k_i)e^{ikz}-\left(\frac{ie}{4\pi}\right)\frac{e^{ikr}}{r}\int d^3x' e^{-i\boldsymbol{k}_f\boldsymbol{x}'}(i\boldsymbol{k}_f\boldsymbol{\gamma}-E\gamma_4-m)\gamma_\lambda A_\lambda(\boldsymbol{x}')\psi(\boldsymbol{x}')$$
$$=u(k_i)e^{ikz}-\frac{e^{ikr}}{r}\left(\frac{ie}{4\pi}\right)(ik_f\gamma-m)\int d^3x' e^{-i\boldsymbol{k}_f\boldsymbol{x}'}\gamma_\lambda A_\lambda(\boldsymbol{x}')\psi(\boldsymbol{x}') \quad (31)$$

ただし $\boldsymbol{k}_f=k\boldsymbol{x}/r$，$r=|\boldsymbol{x}|$ であり，$k_f=(\boldsymbol{k}_f,\ \sqrt{k^2+m^2})$．また外場はある有限の領域に局在しているとし，$r\to\infty$ に従って十分速く 0 になるものとする。

散乱の一般論に従って漸近形を次の形に書く。

$$\psi\sim e^{ikz}+\frac{e^{ikr}}{r}f(\theta) \quad (32)$$

そうすると微分断面積は

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=|f(\theta)|^2 \tag{33}$$

で与えられる。Dirac 粒子では(32)の右辺第一項に $u(k_i)$ が乗ぜられ，(33)では $f(\theta)$ から正エネルギーの最終状態だけを抜き出すという手続きが必要である。詳しくは次に示される計算を参照するとよい。とにかく散乱振幅 $f(\theta)$ は

$$f(\theta)=-\frac{ie}{4\pi}(ik_f\gamma-m)\int d^3x'e^{-i\boldsymbol{k}_f\boldsymbol{x}'}\gamma_\lambda A_\lambda(\boldsymbol{x}')\psi(\boldsymbol{x}') \tag{34}$$

で与えられることになる。

Born 近似における Coulomb 散乱 上に述べた一般論を特別な場合に適用する。ここでは原子核による Coulomb 場で電子が散乱される場合を考えると

$$e\varphi=-\frac{Ze^2}{r}, \qquad \boldsymbol{A}=0 \tag{35}$$

これを(34)に代入すればよいのだが，積分方程式(29)を解かなければ $\psi(\boldsymbol{x}')$ がわからない。そこで $\psi(\boldsymbol{x})$ を(29)の右辺第一項の $\psi_{\rm in}(\boldsymbol{x})$ で近似して(34)に代入しよう。この近似を **Born 近似**とよぶ。すると

$$f_{\rm Born}(\theta)=-\frac{Ze^2}{4\pi}(ik_f\gamma-m)\beta\int d^3x'e^{-i\boldsymbol{k}_f\boldsymbol{x}'}\frac{1}{r'}u(k_i)e^{ikz'} \tag{36}$$

いま $\boldsymbol{k}_i=(0,0,k)$ というベクトルを定義する。また次の式を用いる。

$$(ik_f\gamma-m)\beta=-(\boldsymbol{\alpha k}_f+\beta m+E)=-\{H(k_f)+E\} \tag{37}$$

$$\int d^3x'e^{i(\boldsymbol{k}_i-\boldsymbol{k}_f)\boldsymbol{x}'}\frac{1}{r'}=\frac{4\pi}{(\boldsymbol{k}_i-\boldsymbol{k}_f)^2} \tag{38}$$

ここで(36)は次の形に表わされる。

$$f_{\rm Born}(\theta)=Ze^2\{H(k_f)+E\}\frac{1}{(\boldsymbol{k}_i-\boldsymbol{k}_f)^2}u(k_i) \tag{39}$$

ただし $\boldsymbol{k}_i{}^2=\boldsymbol{k}_f{}^2=k^2$, $\boldsymbol{k}_i\boldsymbol{k}_f=k^2\cos\theta$ (θ は散乱角)である。したがって

$$f_{\rm Born}(\theta)=\frac{Ze^2}{4k^2\sin^2\dfrac{\theta}{2}}\{H(k_f)+E\}u(k_i) \tag{40}$$

この式を見て気がつくことは，$H(k_f)+E$ という演算子は負エネルギー状態に作用させると 0 になり，正エネルギー状態に作用させると残るといういわば**正エネルギー状態への射影演算子**であるから，最終状態が正エネルギー状態にあることは保証されているということである。したがって

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=|f_{\mathrm{Born}}(\theta)|^2=\left(\frac{Ze^2}{4k^2\sin^2\frac{\theta}{2}}\right)^2 u^\dagger(k_i)\{H(k_f)+E\}^2 u(k_i) \quad (41)$$

ところで $H(k_f)^2=E^2$ を用いると

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\left(\frac{Ze^2}{4k^2\sin^2\frac{\theta}{2}}\right)^2 2Eu^\dagger(k_i)\{H(k_f)+E\}u(k_i) \quad (42)$$

さて $u(k_i)$ は正エネルギー状態に対応する Dirac スピノルであるから，**1-11** で定義した射影演算子を用いると

$$\Lambda^{(+)}(k_i)u(k_i)=u(k_i) \quad (43)$$

ただし $\Lambda_n^{(+)}$ の添字 n のかわりに 4 次元運動量 k_i を用いている。さて $u(k_i)$ の具体的な形は入射粒子のスピン方向を指定すれば決まる。しかし多くの場合に入射粒子は偏極していないと考えてよい。このような場合には，スピンが上向きの場合と下向きの場合との平均値を計算しなければならない。すなわち

$$u^\dagger(k_i)\mathcal{O}u(k_i)\longrightarrow\frac{1}{2}\{u_\uparrow^\dagger(k_i)\mathcal{O}u_\uparrow(k_i)+u_\downarrow^\dagger(k_i)\mathcal{O}u_\downarrow(k_i)\} \quad (44)$$

この右辺を，u の形を陽に使わないで計算する方法が，Casimir(カシミール)によって考えられた。

Casimir 演算子の方法　Casimir は次の公式を与えた。

$$\frac{1}{2}\{u_\uparrow^\dagger(k)\mathcal{O}u_\uparrow(k)+u_\downarrow^\dagger(k)\mathcal{O}u_\downarrow(k)\}=\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\Lambda^{(+)}(k)\mathcal{O}) \quad (45)$$

ただし，u はいずれも正エネルギー状態に属し，$\mathcal{O}$ は任意の Dirac 行列である。**1-8** で Dirac 行列の trace について論じたのはこの公式に適用するためである。

(証明)　まず次式を証明する。ただし $u(k)$ として正エネルギーのものをとる。

$$\sum_{\mathrm{spin}}u_s(k)u_r^*(k)=\Lambda^{(+)}(k)_{sr} \quad (46)$$

なぜならば，Dirac スピノルの直交性から

$$\sum_r\{\sum_{\mathrm{spin}}u_s(k)u_r^*(k)\}v_r(k)=v_s(k)\quad [H(k)v(k)=|E|v(k)\text{ の場合}]$$
$$=0\quad [H(k)v(k)=-|E|v(k)\text{ の場合}] \quad (47)$$

が出てくるからである。ゆえに

$$\sum_{\mathrm{spin}}\sum_{r,s}u_r^*(k)\mathcal{O}_{rs}u_s(k)=\sum_{\mathrm{spin}}\sum_{r,s}\mathcal{O}_{rs}u_s(k)u_r^*(k)$$
$$=\sum_{r,s}\mathcal{O}_{rs}\Lambda^{(+)}(k)_{sr}$$

$$=\mathrm{Tr}(\mathcal{O}\Lambda^{(+)}(k))$$
$$=\mathrm{Tr}(\Lambda^{(+)}(k)\mathcal{O}) \tag{48}$$

(45)はこの両辺を 2 で除したものである。$\Lambda^{(+)}(k)$ は **Casimir 演算子**とよばれる†。

さて(42)に戻って，(44)のおきかえをすると

$$u^{\dagger}(k_i)\{H(k_f)+E\}u(k_i) \longrightarrow \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left[\{H(k_f)+E\}\frac{H(k_i)+E}{2E}\right]$$
$$=\frac{1}{4E}\mathrm{Tr}[\{H(k_f)+E\}\{H(k_i)+E\}]$$
$$=\frac{1}{E}(\boldsymbol{k}_i\boldsymbol{k}_f+m^2+E^2)$$
$$=\frac{2}{E}\left(E^2-k^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right) \tag{49}$$

この結果を(42)に代入して

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\left(\frac{Ze^2}{4k^2\sin^2(\theta/2)}\right)^2\times 4\left(E^2-k^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)$$
$$=\frac{Z^2e^4}{4k^4\sin^4(\theta/2)}\left(E^2-k^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right) \tag{50}$$

さて $k/E=v$ で速度を導入し，上式を v で書き直すと

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{Z^2e^4}{4m^2v^4\sin^4(\theta/2)}\left(1-v^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)(1-v^2) \tag{51}$$

Rutherford の因子　　スピンによる補正因子　　Lorentz 収縮

最初の因子は古典的な **Rutherford の公式**を与える。第三因子は **Lorentz 収縮**を表わしている。第二因子がスピンによる補正因子であることは，スピン 0 の場合と比較してみてわかることである。これについては演習問題 1. の 8. を参照のこと。

散乱粒子の偏極　Dirac 粒子の状態をスピン状態 s（たとえばその z 成分，あるいは helicity）とその運動量 $\boldsymbol{k}$ で指定したとして，s_i, $\boldsymbol{k}_i$ という状態から s_f, $\boldsymbol{k}_f$ という状態へ移るときの散乱振幅を考える。それを $\langle s_f, \boldsymbol{k}_f|f_{\mathrm{op}}|s_i, \boldsymbol{k}_i\rangle$ と書くことにする。f_{op} は運動量とか散乱角の関数であると同時に，Dirac 行列で表わされる演算子でもある。このときの微分断面積は

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=|\langle s_f, \boldsymbol{k}_f|f_{\mathrm{op}}|s_i, \boldsymbol{k}_i\rangle|^2 \tag{52}$$

4 行 4 列の行列 f_{op} を 2 行 2 列に直すために，自由な Dirac スピノル

† これは一種の射影演算子である。

$u(\boldsymbol{k}, s)$ を2成分の Pauli スピノル φ を用いて書き直すと

$$|s, \boldsymbol{k}\rangle = u(\boldsymbol{k}, s) = \sqrt{\frac{E+m}{2E}}\begin{pmatrix} \varphi \\ \dfrac{\boldsymbol{\sigma k}}{E+m}\varphi \end{pmatrix} \tag{53}$$

ただし φ は2成分で次の規格化条件を満たすものとする。

$$\varphi^\dagger\varphi = 1 \tag{54}$$

さて，f_{op} は ρ 行列や σ 行列を用いて表現されるが，(53)を f_{op} の行列要素の計算に用いると，次の形に帰着させられる。

$$\langle s_f, \boldsymbol{k}_f | f_{\mathrm{op}} | s_i, \boldsymbol{k}_i\rangle = \varphi_f^\dagger f'_{\mathrm{op}}\varphi_i \tag{55}$$

ただし f'_{op} は2行2列の行列となる。f'_{op} の一般型は

$$f'_{\mathrm{op}} = F + iG\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{e}_f\times\boldsymbol{e}_i), \qquad \boldsymbol{e}_i = \frac{\boldsymbol{k}_i}{k_i}, \quad \boldsymbol{e}_f = \frac{\boldsymbol{k}_f}{k_f} \tag{56}$$

この形はパリティ保存，時間反転に対する不変性† と矛盾しない。また F と G とは k^2 と $\cos\theta$ との関数である。

さていま入射粒子が偏極していないとすれば，入射粒子のスピンの2状態について平均をとると

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{1}{2}\sum_{s_i}|\langle s_f, \boldsymbol{k}_f|f_{\mathrm{op}}|s_i, \boldsymbol{k}_i\rangle|^2 \\
&= \frac{1}{2}\sum_{s_i}\varphi_f^\dagger\{F+iG\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{e}_f\times\boldsymbol{e}_i)\}\varphi_i\varphi_i^\dagger\{F^*-iG^*\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{e}_f\times\boldsymbol{e}_i)\}\varphi_f \\
&= \frac{1}{2}\varphi_f^\dagger\{F+iG\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{e}_f\times\boldsymbol{e}_i)\}\{F^*-iG^*\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{e}_f\times\boldsymbol{e}_i)\}\varphi_f \\
&= \frac{1}{2}(|F|^2+|G|^2\sin^2\theta)+\mathrm{Im}(FG^*)\varphi_f^\dagger\boldsymbol{\sigma}\varphi_f\cdot(\boldsymbol{e}_f\times\boldsymbol{e}_i)
\end{aligned} \tag{57}$$

この結果からわかるように，もし $\mathrm{Im}(FG^*)\neq 0$ ならば，散乱された粒子は偏極しており，偏極の起こる方向は散乱平面に垂直である。上の散乱断面積を測るには散乱された粒子の運動量とスピンとの両方を測らねばならない。そして指定されたスピン方向の粒子だけを選ぶときに上の公式が成り立つ。

次に入射粒子が偏極していたとして，最終状態ではスピンを測らないとしたとすると，そのときの断面積は

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |F|^2+|G|^2\sin^2\theta+2\,\mathrm{Im}(FG^*)\varphi_i^\dagger\boldsymbol{\sigma}\varphi_i\cdot(\boldsymbol{e}_f\times\boldsymbol{e}_i) \tag{58}$$

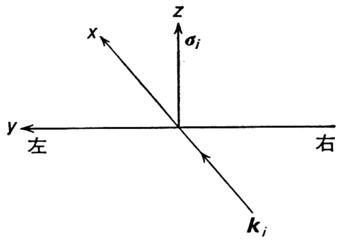
さて $\boldsymbol{k}_i$ の方向を x 軸に選び，$\boldsymbol{k}_i$ と $\boldsymbol{\sigma}_i$ とで作る平面を xz 平面とし，$\langle\boldsymbol{\sigma}\rangle_i$

† 時間反転については付録を見よ。

の z 成分が正になるように z 軸を選ぶ。そうすると

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_i \cdot (\boldsymbol{e}_f \times \boldsymbol{e}_i) = -\langle \sigma_z \rangle \sin\theta \qquad [(\boldsymbol{k}_f)_y > 0 \text{ の場合}]$$
$$= \langle \sigma_z \rangle \sin\theta \qquad [(\boldsymbol{k}_f)_y < 0 \text{ の場合}] \tag{59}$$

$(\boldsymbol{k}_f)_y > 0$ ならば，1・3 図で粒子は左の方に散乱され，$(\boldsymbol{k}_f)_y < 0$ ならば右の方に散乱される。もちろんこの二つの場合の散乱強度は等しくないので**左右非対称性**を生ずる。これを left-right asymmetry とよぶ。この割合 a を次式で定義する。



1・3 図　左右非対称性を説明する図

$$a = \frac{\left(\dfrac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\mathrm{R}} - \left(\dfrac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\mathrm{L}}}{\left(\dfrac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\mathrm{R}} + \left(\dfrac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\mathrm{L}}} = \langle \sigma_z \rangle_i \frac{2\,\mathrm{Im}(FG^*)\sin\theta}{|F|^2 + |G|^2 \sin^2\theta} \tag{60}$$

1-15 電子・電子散乱

この節では電子同士の散乱の問題を取り扱う。この議論のためにはこの本の後の方に出てくる知識を前借りしなければならないが，ここでこの問題を論ずることはいろいろな意味で適切であると思われる。

2電子間の相互作用は，まず Coulomb ポテンシャルで表わされるから，摂動エネルギーとして

$$H' = \frac{e^2}{r} \tag{1}$$

をとる。ただし r は2電子間の距離である。しかしこのような遠隔作用的ポテンシャルは一方が十分重くてほとんど止まっていると考えられる場合にしか成り立たない。両者が動いているときには**遅延効果**(retardation effect)があり，これを考慮に入れなければならない。またそのほかに横波の効果による補正があり，これは電磁場の量子論的効果であるが，ある程度対応論的に量子化しないでとり入れることができる。そこでまず Coulomb 相互作用のみを考慮し，他の効果を順次補正として入れてゆくことにする。まず散乱の前後の運動量を

$$\boldsymbol{q}_1 + \boldsymbol{q}_2 \longrightarrow \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 \tag{2}$$

のようにとる。そうすると波動関数は

$$\frac{e^{iq_1x_1}}{\sqrt{V}}u(q_1), \quad \cdots \quad \text{etc.} \tag{3}$$

のようになる。ただし Dirac スピノルは $u^\dagger(q_1)u(q_1)=1$ のように規格化されているものとする。したがって

$$\begin{aligned} H'_{fi} &= e^2\int\frac{d^3x_1d^3x}{r}e^{i(\boldsymbol{q}_1-\boldsymbol{p}_1)\boldsymbol{x}_1+i(\boldsymbol{q}_2-\boldsymbol{p}_2)\boldsymbol{x}_2}\frac{u^\dagger(p_1)u(q_1)\cdot u^\dagger(p_2)u(q_2)}{V^2} \\ &= e^2\int\frac{d^3r}{r}e^{i(\boldsymbol{q}_1-\boldsymbol{p}_1)\boldsymbol{r}}\int d^3x_2e^{i(\boldsymbol{P}_i-\boldsymbol{P}_f)\boldsymbol{x}_2}\frac{u^\dagger(p_1)u(q_1)\cdot u^\dagger(p_2)u(q_2)}{V^2} \\ &= e^2\frac{4\pi}{(\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{q}_1)^2}(2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{P}_i-\boldsymbol{P}_f)\frac{u^\dagger(p_1)u(q_1)\cdot u^\dagger(p_2)u(q_2)}{V^2} \end{aligned} \tag{4}$$

ただし $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{P}_i=\boldsymbol{q}_1+\boldsymbol{q}_2$, $\boldsymbol{P}_f=\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2$ である。また運動量 $\boldsymbol{q}_1$ の電子は散乱後 $\boldsymbol{p}_1$ に，$\boldsymbol{q}_2$ のものは $\boldsymbol{p}_2$ になるとしている。さて 2 体散乱の理論は 2-4 で与えられるので，そこの結果を前借りして

$$t_{fi}=4\pi e^2\frac{(2\pi)^4}{V^2}\frac{u^\dagger(p_1)u(q_1)\cdot u^\dagger(p_2)u(q_2)}{(\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{q}_1)^2} \tag{5}$$

今後重心系での断面積を考えるものとする。そうすると

$$(p_1)_0=(q_1)_0=(p_2)_0=(q_2)_0=E=\frac{W}{2} \tag{6}$$

ただし W は重心系での全エネルギーである。再び 2-4 の結果を借りて

$$\mathcal{M}_{fi}=\frac{W^2}{4}\cdot4\pi e^2\cdot\frac{1}{(2\pi)^2}\frac{u^\dagger(p_1)u(q_1)\cdot u^\dagger(p_2)u(q_2)}{(\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{q}_1)^2} \tag{7}$$

ゆえに重心系での微分断面積は

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{e^4W^2}{4}\left|\frac{u^\dagger(p_1)u(q_1)\cdot u^\dagger(p_2)u(q_2)}{(\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{q}_1)^2}\right|^2 \tag{8}$$

しかし正しい公式を得るためには，次の二つの重要な補正を考えなければならない。

（1） **遅延効果**，　　（2） **交換効果**

遅延効果　まず前者について考える。もし散乱粒子の一方が重くて，位置がほとんど固定されていると考えられる場合には，静的ポテンシャル $e\varphi$ のみを考えればよいが，両方とも動くときには $-e\boldsymbol{\alpha A}$ の相互作用も働く。したがって後者をとり入れることは $u^\dagger(p)u(q)=\bar{u}(p)\gamma_4u(q)$ に他の成分を加えることになり，次のおきかえをすることに相当する†。

$$u^\dagger(p_1)u(q_1)\cdot u^\dagger(p_2)u(q_2)\longrightarrow\bar{u}(p_1)\gamma_\lambda u(q_1)\cdot\bar{u}(p_2)\gamma_\lambda u(q_2) \tag{9}$$

また遅延ポテンシャルの考えは遠隔作用のかわりに近接作用の考えをと

† これは電磁場を量子化しないと証明できないが，こういうおきかえをしたときにのみ $\mathcal{M}$ が相対論的に不変となる。

り入れることに対応し，2-1 で明らかにされるように第一の粒子に働く力をたとえば

$$e\varphi(\boldsymbol{x}_1,\, t) \longrightarrow e\varphi(\boldsymbol{x}_1,\, t-r) \qquad (r=|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2|) \tag{10}$$

でおきかえることに相当する。そしてこのおきかえは分母を

$$(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})^2 \longrightarrow (\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})^2-(p_0-q_0)^2=(p-q)^2 \tag{11}$$

とすることに相当する。したがってこのような相対論的効果をとり入れると

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{e^4W^2}{4}\left|\frac{\bar{u}(p_1)\gamma_\lambda u(q_1)\cdot\bar{u}(p_2)\gamma_\lambda u(q_2)}{(p_1-q_1)^2}\right|^2 \tag{12}$$

交換効果　さて次の補正は終状態における 2 電子の区別がつかないことから生じる。したがってどちらの電子が $\boldsymbol{p}_1$ の状態にいき，どちらが $\boldsymbol{p}_2$ の状態にいくかという二つの可能性を量子力学の原理に従って振幅で加えなければならない。**Pauli の原理**によれば，この振幅は 2 電子間で運動量とスピンを同時に交換する演算に対して反対称でなければならないから，**交換効果**を考慮した微分断面積は

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{e^4W^2}{4}\left|\frac{\bar{u}(p_1)\gamma_\lambda u(q_1)\cdot\bar{u}(p_2)\gamma_\lambda u(q_2)}{(p_1-q_1)^2}-(p_1\rightleftarrows p_2)\right|^2 \tag{13}$$

ただし $p_1\rightleftarrows p_2$ は運動量のみならずスピンの交換をも表わす。非相対論的に交換効果を入れることについては，もう一度 **4** 章で議論される。

次に入射電子のスピンが偏っておらず，散乱電子についてはそのスピンを測定しないという場合に対応する最も普通の断面積を計算するには，初期状態のスピンについて平均し，終状態でのスピンについて和をとるという演算を実行しなければならない。このためにはすでに導入した Casimir 演算子を用いる。さて基礎となる式は

$$\sum_{\substack{\text{spin}\\ E>0}} u_r(k)u_s^*(k)=\frac{1}{2k_0}(\boldsymbol{\alpha k}+\beta m+k_0)_{rs} \tag{14}$$

しかし相対論的計算には次の式の方がもっと便利である。

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{\text{spin}\\ E>0}} u_r(k)\bar{u}_s(k)&=\frac{1}{2k_0}\{(\boldsymbol{\alpha k}+\beta m+k_0)\beta\}_{rs}\\ &=\frac{1}{2k_0}(-i\gamma k+m)_{rs} \qquad (\text{ただし } \gamma k=\gamma_\mu k_\mu)\end{aligned} \tag{15}$$

なおここで考えている問題では重心系ですべての分母 $2k_0$ を W でおきかえてもよい。さて断面積の式は

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{e^4W^2}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\sum_{\text{spins}}\left|\quad〃\quad\right|^2 \tag{16}$$

ただし絶対値の記号の中身は(13)と同じである。因子 $\left(\frac{1}{2}\right)^2$ は2電子のスピン方向を平均しなければならないことから生ずる因子である。Casimir の方法で

$$W^2|\quad〃\quad|^2 \longrightarrow W^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\sum_{\text{spins}}\left|\quad〃\quad\right|^2$$

$$=\frac{1}{4W^2}\frac{\mathrm{Tr}\{\gamma_\lambda(-i\gamma q_1+m)\gamma_\mu(-i\gamma p_1+m)\}}{(p_1-q_1)^2}$$

$$\times\frac{\mathrm{Tr}\{\gamma_\lambda(-i\gamma q_2+m)\gamma_\mu(-i\gamma p_2+m)\}}{(p_1-q_1)^2}+(p_1\rightleftarrows p_2)$$

$$-\frac{1}{4W^2}\frac{\mathrm{Tr}\{\gamma_\lambda(-i\gamma q_1+m)\gamma_\mu(-i\gamma p_2+m)\gamma_\lambda(-i\gamma q_2+m)\gamma_\mu(-i\gamma p_1+m)\}}{(p_1-q_1)^2(p_2-q_1)^2}$$

$$+(p_1\rightleftarrows p_2) \tag{17}$$

第一項の trace は高々 γ を4個しか含まない。第三項の trace は，演習問題 **1.** の 2. の公式を用いて γ_λ と γ_μ とを消去すれば高々 4 個の γ しか含まない。したがって演習問題 **1.** の 3. の公式を用いて評価することができる。そうすると上の第一項は

$$\frac{8}{W^2\{(p_1-q_1)^2\}^2}[m^2\{2m^2+(p_1q_1)+(p_2q_2)\}$$
$$+(q_1q_2)(p_1p_2)+(q_1p_2)(p_1q_2)]$$

第二項は $p_1\rightleftarrows p_2$ により

$$\frac{8}{W^2\{(p_2-q_1)^2\}^2}[m^2\{2m^2+(p_2q_1)+(p_1q_2)\}$$
$$+(q_1q_2)(p_1p_2)+(p_1q_1)(p_2q_2)]$$

第三項は

$$\frac{4}{W^2(p_1-q_1)^2(p_2-q_1)^2}\{2m^4+m^2(p_1q_1)+m^2(p_2q_2)$$
$$+m^2(p_1+q_1)(p_2+q_2)+2(q_1q_2)(p_1p_2)\}$$

第四項は

$$\frac{4}{W^2(p_2-q_1)^2(p_1-q_1)^2}\{2m^4+m^2(p_2q_1)+m^2(p_1q_2)$$
$$+m^2(p_2+q_1)(p_1+q_2)+2(q_1q_2)(p_1p_2)\}$$

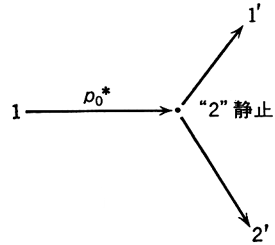
よく調べると，第三項と第四項とは等しい。上の4式の和に $e^4/4$ を乗じたものが微分断面積である。ところで重心系では

$$|\boldsymbol{p}_1|=|\boldsymbol{p}_2|=|\boldsymbol{q}_1|=|\boldsymbol{q}_2|=p,\qquad \boldsymbol{p}_1\boldsymbol{q}_1=p^2\cos\theta \tag{18}$$

とおけば，上の式は $E=W/2,\ p,\ \theta$ を用いて表わせることになる。その結果は

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{cm}}=\frac{e^4}{4p^4E^2\sin^4\theta}\{4(E^2+p^2)^2-3(E^2+p^2)^2\sin^2\theta$$
$$+p^4(\sin^4\theta+4\sin^2\theta)\} \tag{19}$$

この式は Møller(メラー)によって導き出された。この結果を実験と比較するには実験室系に変換した方が便利である。そこで両系の間の関係を調べてみる。



1・4 図 実験室系での電子・電子散乱

実験室系への変換 今後実験室系の量には * をつけることにする。

入射粒子の運動量とエネルギーは

実験室系 p^*, E^*

重心系 p, E

また散乱された電子の運動量およびエネルギーには(実験室系で)添字 1 をつけることにすると，変換の規則は

$$\left.\begin{aligned} &p^*=\frac{2pE}{m}, \qquad E^*=\frac{E^2+p^2}{m}, \qquad p^2=\frac{m}{2}(E^*-m) \\ &p_1^*\sin\theta^*=p\sin\theta, \qquad p_1^*\cos\theta^*=\frac{E}{m}p(1+\cos\theta) \\ &E_1^*=\frac{1}{m}(E^2+m^2\cos\theta) \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

ところで $E_2^*=E^*+m-E_1^*$ であり，

$$\cos\theta=\frac{E^*+m-2E_2^*}{E^*-m} \tag{21}$$

そこで次の量を定義する。

$$q=\frac{E_2^*}{m}-1, \qquad \gamma=\frac{E^*}{m} \tag{22}$$

そうすると

$$d\sigma=\frac{d\sigma}{d\Omega}d\Omega=\frac{d\sigma}{d\Omega^*}d\Omega^* \qquad (d\Omega=\sin\theta\,d\theta\,d\varphi,\ d\Omega^*=\sin\theta^*d\theta^*d\varphi) \tag{23}$$

となる。ここで大事なことは全立体角について積分した断面積は 2-4 で示されるように **Lorentz 不変**，したがって実験室系，重心系の区別がないことであって，これが $d\sigma$ には * をつけていない理由である。(19), (22), (23)を組み合わせ，φ について積分すると

$$\frac{d\sigma}{dq}=2\pi r_0{}^2\frac{\gamma^2}{\gamma^2-1}\cdot\frac{1}{q^2(\gamma-1-q)^2} \times\left[(\gamma-1)^2-\frac{q(\gamma-1-q)}{\gamma^2}\{2\gamma^2+2\gamma-1-q(\gamma-1-q)\}\right] \tag{24}$$

ただし $r_0=e^2/m$ は**古典電子半径**とよばれ，約 2.818×10^{-13} cm である。さて 2 電子の中で速いものの散乱角を θ^*，遅いもののを θ' とすると

$$\cos 2\theta^*_{\max}=\frac{\gamma-1}{\gamma+3},\qquad q=\frac{2(\gamma-1)\cos^2\theta'}{2+(\gamma-1)\sin^2\theta'} \tag{25}$$

となり,

$$0\leq\theta^*\leq\theta^*_{\max}\leq\theta'\leq\frac{\pi}{2} \tag{26}$$

非相対論的近似では, $\gamma\to 1$ となり種々の公式が簡単になる。たとえば

$$\frac{p_1{}^*\sin\theta^*}{p_1{}^*\cos\theta^*}=\frac{p\sin\theta}{(E/m)p(1+\cos\theta)}=\frac{m}{E}\tan\frac{\theta}{2}$$

$$\text{すなわち}\quad \tan\theta^*=\frac{m}{E}\tan\frac{\theta}{2} \tag{27}$$

において, 非相対論的近似 $E\to m$ とすれば

$$\theta=2\theta^*\qquad\left(0\leq\theta^*\leq\frac{\pi}{2}\right) \tag{28}$$

が得られ,

$$d\sigma=2\pi r_0{}^2\frac{1}{v_0{}^4}d(\cos 2\theta^*)\left(\frac{1}{\sin^4\theta^*}+\frac{1}{\cos^4\theta^*}-\frac{1}{\sin^2\theta^*\cos^2\theta^*}\right) \tag{29}$$

が得られる。これは後に **4** 章で出てくる Mott(モット)の公式である。ただしそこでは重心系で θ を用いた公式が与えられている。

電子・陽電子散乱 電子・電子散乱と全く同じように取り扱える問題に電子・陽電子散乱がある。この過程に出てくるエネルギー運動量ベクトルを次のように表わす。

$$q_1+q_2\longrightarrow p_1+p_2 \tag{30}$$

ただし添字1は電子, 添字2は陽電子を表わす。ところで空孔理論によれば, $(-q_2)$ という負エネルギー状態にあった孔が, $(-p_2)$ という負エネルギー状態に移ったことを意味する。これは $(-p_2)$ という負エネルギー電子が $(-q_2)$ という負エネルギー状態へ移ったということができる。したがって(30)を電子だけで書けば,

$$q_1+(-p_2)\longrightarrow p_1+(-q_2)$$

という正負エネルギーの電子・電子散乱を表わすと考えてもよい。そうすれば上の計算と全く同様な計算ができる。ただし Casimir 演算子は正エネルギーと負エネルギーとで使い分けなくてはならない。この断面積は Bhabha(バーバー)によって計算されたが, ここでは簡単化して非相対論的近似式のみを書いておく。

$$d\sigma=2\pi r_0{}^2\frac{1}{v_0{}^4}d(\cos 2\theta^*)\frac{1}{\sin^4\theta^*} \tag{31}$$

この近似では交換効果の項が消えている。ここで陽電子を空孔理論で取り

扱ったが，その方法は電子の散乱問題を空孔理論で正しく取り扱うための一つの考え方を提供する。これについては次節で議論しよう。

1-16 空孔理論における Dirac 粒子の散乱

外場の中を動く電子の運動は 1-14 の(24)によって支配される。すなわち

$$\psi(x)=\psi_{\text{in}}(x)-ie\int d^4x' S_{\text{ret}}(x-x')\gamma_\lambda A_\lambda(x')\psi(x') \qquad (1)$$

しかしこの方程式は一電子理論において導き出され，負エネルギー状態はすでに満員であるとする空孔理論を考えなかった結果である。もし後者に忠実ならば，Pauli の原理により中間状態では負エネルギー状態にいかれないはずである。ところで空孔理論を採用すれば，すでに負エネルギー状態が完全に満員なのであるから，我々の考えなければならない問題は必然的に多体問題である。したがって正しい理論を建設するためには場の量子論によらなければならない。しかしこの本では我々は意識的に場の量子論を回避しているのでもっと簡単な方法を考えよう。空孔理論におけるψの方程式は Feynman により簡単な直観的方法が与えられた。もちろん Feynman の方法が正しいことは後に場の量子論によって証明されたのであるが，我々はこの証明なしに結果を信ずることにする。さて Feynman によれば，(1)は次の形に書き直されねばならない。

$$\psi(x)=\psi_{\text{in}}(x)-ie\int d^4x' S_{\text{F}}(x-x')\gamma_\lambda A_\lambda(x')\psi(x') \qquad (2)$$

ただし

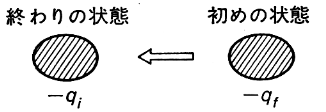
$$S_{\text{F}}(x)=\left(\gamma_\lambda\frac{\partial}{\partial x_\lambda}-m\right)\Delta_{\text{F}}(x) \qquad (3)$$

$$\Delta_{\text{F}}(x)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4p\frac{e^{i\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}-ip_0x_0}}{\boldsymbol{p}^2+m^2-p_0{}^2-i\varepsilon} \qquad (4)$$

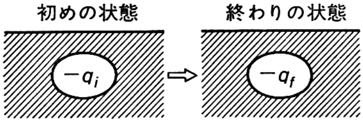
であり，$\psi(x)$ の物理的解釈も元のものと少し変わってきている。また(2)と(3)とは 1-14 の(21)と(2)とに比較されるべきである。以下では厳密性を欠くが，直観的にいかにして方程式(2)が導き出されるかを議論しよう。

この問題のヒントを得るために，電子のかわりに陽電子が外場で散乱される問題について考えよう。エネルギー運動量ベクトル q_i の陽電子が，q_f という状態に散乱されたとする。すなわち

$$q_i \longrightarrow q_f \quad (\text{陽電子}) \qquad (5)$$



1·5 図 負エネルギー状態の空席としての陽電子の状態



1·6 図 負エネルギーの電子の移動

ところが陽電子は負エネルギー状態の孔, すなわち空席で表わされるから, 最初 $-q_i$ にあった空席が, $-q_f$ に移ったことになる。これは $-q_f$ という状態にあった負エネルギー電子が, $-q_i$ に移ったことになる。すなわち,

$$-q_f \longrightarrow -q_i \quad \text{（負エネルギー電子）} \tag{6}$$

このような遷移を図示したものが, 1·5 図および 1·6 図である。

このことは考えてみれば奇妙なことで, 陽電子の散乱を負エネルギー粒子の散乱で表現してみると, 陽電子の終わりの状態に対応する状態がまず現われ, そして陽電子の初めの状態に対応する状態が最後に現われる。このことははなはだ曖昧な表現を借りると, 負エネルギー状態の電子は未来から過去に向かって進んでいると解釈することができる。この見方が問題解決のヒントとなる。

さて一電子理論では, 負エネルギーの**海**というものを考えてなく, 負エネルギーの電子も普通の粒子として過去から未来に向かって進んでいるものと考えられる。正エネルギーの電子はいずれの理論においても過去から未来に向かって進んでいる。そこで上の考え方を定式化するために次のような仮設を導入する。

Stueckelberg の因果律 Stueckelberg(シュティッケルベルク)の定義した因果律を仮定するが, これはもともと場の量子論の言葉で書かれているので, まずそれに対応した表現を導入しよう。ある粒子が $\boldsymbol{p}_1$ という運動量をもって入射し, 外場により散乱されて $\boldsymbol{p}_2$ という運動量をもって出ていったとする。これを場の理論の言葉では, “外場との相互作用の結果, 運動量 $\boldsymbol{p}_1$ の粒子が消えて運動量 $\boldsymbol{p}_2$ の粒子が創られた” という。

Stueckelberg はこのような言語を用いて**因果律**を次のように表現した。

“ある粒子の消滅は必ずその粒子の創生の後で起こる”

このように表現された因果律は当然のように聞こえるが, 方程式(2)を証明するのに本質的である。なぜならば粒子とは何かという問題がまず生ずるからである。そこで一電子理論と空孔理論とで粒子の定義がどのように違うかを比較してみよう。

1)　一電子理論：エネルギーが正でも負でも，すべての電子は粒子である。またこの理論には陽電子は存在しない。散乱は方程式(1)で記述される。

2)　空孔理論：正エネルギーの電子と陽電子が粒子である。負エネルギーの海を埋めつくしている電子は観測にかからないのであるから粒子ではない。

Feynman の理論　さて空孔理論では負エネルギーの電子は粒子ではなく，したがって Stueckelberg の因果律に従わない。なぜならば，4 次元運動量 q の陽電子が創られ，後に消えるという過程は，負エネルギーの海の中にまず 4 次元運動量 $-q$ の空席が創られ，後にその空席がなくなることだからである。すなわち，4 次元運動量 $-q$ の負エネルギー電子がまず消滅し，後に創られるということだからである。そこで Stueckelberg は，負エネルギー電子は粒子でないと解釈し，Feynman は未来から過去に進むと解釈した。そこでこの Feynman の解釈を式で表現しよう。

数学的にいうと，散乱問題においては正エネルギー電子の散乱を支配する Green 関数は，方程式(1)に出てきた S_{ret} であり，負エネルギー電子の散乱を支配する Green 関数は S_{adv} である。ただし後者は advanced Green's function† とよばれ，retarded function と並べて書いて比較すると次のようなものである。

$$S_{\mathrm{ret}}(x)=\left(\gamma_\lambda\frac{\partial}{\partial x_\lambda}-m\right)\Delta_{\mathrm{ret}}(x);\quad S_{\mathrm{adv}}(x)=\left(\gamma_\lambda\frac{\partial}{\partial x_\lambda}-m\right)\Delta_{\mathrm{adv}}(x) \tag{7}$$

$$\begin{aligned}\Delta_{\mathrm{ret}}(x)&=\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4p\frac{e^{i\boldsymbol{px}-ip_0x_0}}{\boldsymbol{p}^2+m^2-(p_0+i\varepsilon)}\\ \Delta_{\mathrm{adv}}(x)&=\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4p\frac{e^{i\boldsymbol{px}-ip_0x_0}}{\boldsymbol{p}^2+m^2-(p_0-i\varepsilon)}\end{aligned} \tag{8}$$

さて Δ_{ret}，Δ_{adv} の Fourier 変換はそれぞれ次のような分母をもつ。

$$\boldsymbol{p}^2+m^2-p_0{}^2-i\varepsilon p_0 \qquad (\Delta_{\mathrm{ret}}\text{ に対して}) \tag{9}$$

$$\boldsymbol{p}^2+m^2-p_0{}^2+i\varepsilon p_0 \qquad (\Delta_{\mathrm{adv}}\text{ に対して}) \tag{10}$$

さて，$p_0>0$ に対しては上の Δ_{ret}，$p_0<0$ に対しては Δ_{adv} を使うということになれば，(9)も(10)もともに虚数部は負の無限小になる。そこで(9)と(10)とをまとめて

$$\boldsymbol{p}^2+m^2-p_0{}^2-i\varepsilon=p^2+m^2-i\varepsilon \tag{11}$$

そこで次のような Green 関数を定義する。

† 遅延 Green 関数の反対語だが適当な訳語がないので英語のままにしておく。

$$\Delta_F(x)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4p\frac{e^{ipx-p_0x_0}}{\boldsymbol{p}^2+m^2-p_0{}^2-i\varepsilon} \tag{12}$$

$$S_F(x)=\left(\gamma_\lambda\frac{\partial}{\partial x_\lambda}-m\right)\Delta_F(x) \tag{13}$$

Feynman によれば，空孔理論における散乱問題には方程式(2)を用いなければならないことになる。実はこの方程式が(1)と本質的に異なってくるのは，電磁場が量子化されたとき，そして特に電子が複数個存在するときである。

次に注意しておきたいことは，散乱問題は方程式(1)あるいは(2)によって記述されるが，束縛状態に対してはどうなるかということである。このときには明らかに入射波は存在しないので，$\psi_{\rm in}(x)=0$ とおくべきである。したがって束縛状態の方程式は，静的外場に対して一電子理論ならば

$$\psi(x)=-ie\int d^4x' S_{\rm ret}(x-x')\gamma_\lambda A_\lambda(x')\psi(x') \tag{14}$$

で与えられることになるし，空孔理論ならば

$$\psi(x)=-ie\int d^4x' S_F(x-x')\gamma_\lambda A_\lambda(x')\psi(x') \tag{15}$$

これらの方程式は，異なる Green 関数を用いて書かれているが，電磁場が量子化されていなければ本質的に同じもので，微分型の Dirac 方程式を解いて得られた束縛状態の波動関数は上の方程式(14)および(15)を同時に満たしていることが，容易に示される。ここでさらに述べておきたいことは，量子論的に高次の補正を考えなければ，2種類の方程式は多くの場合同一の結果を出すということである。その証明には残念ながら場の量子論を必要とする。そこで本書では，後で Compton 散乱の計算をする際にわざわざ空孔理論を使わずに，一電子理論を使って行なう。それは空孔理論の結果と一致することを前もって知っているからである。

演習問題 1.

1. Weyl の方程式の共変性を証明せよ。

2. 次の公式を証明せよ。

$$\gamma_\lambda\gamma_a\gamma_\lambda=-2\gamma_a$$
$$\gamma_\lambda\gamma_a\gamma_b\gamma_\lambda=4\delta_{ab}$$
$$\gamma_\lambda\gamma_a\gamma_b\gamma_c\gamma_\lambda=-2\gamma_c\gamma_b\gamma_a$$

3. 次の公式を証明せよ。

$$\mathrm{Tr}(\gamma_\sigma\gamma_\lambda\gamma_\mu\gamma_\nu)=4(\delta_{\sigma\lambda}\delta_{\mu\nu}+\delta_{\lambda\mu}\delta_{\nu\sigma}-\delta_{\sigma\mu}\delta_{\lambda\nu})$$

4. 任意個数の γ 行列の積の trace を求めるための漸化式を作れ。

5. 静磁場中で Dirac 方程式に従う粒子の helicity について論ぜよ。

6. Coulomb ポテンシャル $-Ze^2/r$ はベクトルの第四成分であるが，もしこのポテンシャルが4次元的スカラーならば，Dirac 方程式に従う粒子の束縛状態の準位はどのような式で与えられるか。

7. 次のポテンシャルによる Dirac 粒子の散乱の微分断面積を求めよ。

（1） $V=g^2\dfrac{e^{-\mu r}}{r}\beta$, （2） $V=g^2\dfrac{e^{-\mu r}}{r}$

8. スピン0の粒子の Coulomb 場による散乱断面積を求めよ。**1-14** においてスピン 1/2 の粒子の Coulomb 場による散乱の断面積を，Rutherford 散乱と比較してスピンの効果と Lorentz 収縮の効果とに分けた。それがはたして正しいかどうか，すなわちスピンの効果を知るためにスピン 0 の場合についてここで計算する。もちろん Born 近似で計算する。

2. 電磁場の量子論

2-1 古典電磁力学の正準形式

前章では与えられた外場(電磁場)と Dirac 粒子との相互作用を議論してきた。しかし Dirac 粒子，特に電子が運動をすると，それによって新しい場が生じるから，場の運動方程式と電子の運動方程式とを連立させねばならない。そこで電磁場を与えられた外場とせずに独立な力学系として取り扱うことを考えよう。

よく知られているように，電磁場は **Maxwell の方程式**に従う。そこで量子論を適用するためには， Maxwell の方程式を正準形式に書きかえなければならない。そこでこの節ではまずこの問題をとりあげてみよう†。

Maxwell–Lorentz の方程式　ここでとりあげるのは元の Maxwell の方程式ではなくて，ミクロの世界の記述に便利な **Maxwell–Lorentz の方程式**である††。

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}+\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}=0 \qquad (1)$$

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{H}=0 \qquad (2)$$

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H}-\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}=4\pi\rho\boldsymbol{v} \qquad (3)$$

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{E}=4\pi\rho \qquad (4)$$

ただし ρ は荷電密度であり，$\boldsymbol{v}$ は時空の各点における荷電の速度である。

---

† この問題については本シリーズ 2，平川浩正：電磁気学(1968)，同 4，山内恭彦：量子力学(1968)等を参照のこと。またもっと詳しいのは W. Heitler: *Quantum Theory of Radiation* (3 rd ed.) (Oxford, 1954).

†† ここでは古典論との対応をしばしば論ずるので Heaviside 単位系でなく，Gauss 単位系を用いる。場の量子論一般では Heaviside 単位系の方が便利である。もちろん自然単位は併用しているので $c=1$ としてある。

上の方程式系より，次の連続の方程式が導かれる（荷電の局所的保存則を表わす）。

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathrm{div}\,\boldsymbol{j}=0, \qquad \boldsymbol{j}=\rho\boldsymbol{v} \tag{5}$$

他方与えられた場における荷電粒子の運動は Lorentz の力で決まる。

$$\boldsymbol{k}=\rho(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H}) \tag{6}$$

これは単位体積あたりの力密度である。点荷電の場合には(6)の式で ρ を全荷電 e でおきかえることにより，次の運動方程式が得られる。

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt}=e(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H}) \tag{7}$$

ポテンシャル $\boldsymbol{H}$ は(2)の方程式に従うから，常に次のような $\boldsymbol{A}$ を見つけることができる†。

$$\boldsymbol{H}=\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} \tag{8}$$

この式を満たしているような $\boldsymbol{A}$ を**ベクトル・ポテンシャル**とよぶ。方程式(1)に(8)の表現を代入すれば

$$\mathrm{rot}\left(\boldsymbol{E}+\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\right)=0 \tag{9}$$

ところがこのような関係があれば rot の中身は常に次のように表現できる††。

$$\boldsymbol{E}+\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}=-\mathrm{grad}\,\varphi \tag{10}$$

この φ を**スカラー・ポテンシャル**とよぶ。これらのポテンシャルはすでに前章でしばしば用いられているが，ここで改めて定義を与えておいたのである。さて(10)から

$$\boldsymbol{E}=-\mathrm{grad}\,\varphi-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t} \tag{11}$$

こうして 6 成分の $\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{H}$ とが 4 成分の $\boldsymbol{A}$ と φ とで表現されることになる。そこで次の問題は Maxwell–Lorentz の方程式からポテンシャルの方程式を導き出すことである。これと関連して重要なことがある。それは $\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{H}$ とを与えてもポテンシャルは一意的に決まらないということである。すなわち $\boldsymbol{A}$ と φ とを同時に

$$\boldsymbol{A}\longrightarrow\boldsymbol{A}-\mathrm{grad}\,\Lambda, \qquad \varphi\longrightarrow\varphi+\frac{\partial\Lambda}{\partial t} \tag{12}$$

† $\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}=0$ は恒等式である。
†† $\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,\varphi=0$ は恒等式である。

のように変えても，$\boldsymbol{E}$ も $\boldsymbol{H}$ も変わらない。(12)の変換を**ゲージ変換**(gauge transformation)とよぶ。すなわち与えられた $\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{H}$ とに対してポテンシャルを決めようとしても，ゲージ変換の不定性があるということである。

次に Λ を適当に選んでゲージ変換をすれば，必ず次の方程式が成り立つようにすることが可能であることを証明できる。すなわち

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A}+\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0 \tag{13}$$

このような付加条件を **Lorentz 条件**(Lorentz condition)とよぶ。この条件を課してもなおゲージの不定性が残る。すなわちもし**ゲージ関数** Λ が

$$\Box\Lambda=0 \tag{14}$$

を満たしていれば，このゲージ変換は Lorentz 条件を不変に保つ。すなわち，このような制限されたゲージ変換の下では

$$\boldsymbol{E},\quad \boldsymbol{H},\quad \operatorname{div} \boldsymbol{A}+\frac{\partial\varphi}{\partial t}$$

が不変量である。さて Lorentz 条件が満たされているゲージでは，ポテンシャルに対する Maxwell-Lorentz の方程式は次のように簡単になる。

$$\Box\boldsymbol{A}=-4\pi\boldsymbol{j} \tag{15}$$

$$\Box\varphi=-4\pi\rho \tag{16}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A}+\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0 \tag{17}$$

Lorentz 条件を満たすようなゲージを **Lorentz ゲージ**(Lorentz gauge)とよぶ。このほかにもう一つ重要なゲージがある。それは **Coulomb ゲージ**(Coulomb gauge)とよばれ，(13)あるいは(17)のかわりに次の条件を課する。

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A}=0 \tag{18}$$

この場合にはポテンシャルの方程式は，Lorentz ゲージの場合ほど見かけが簡単にならない。すなわち，

$$\Box\boldsymbol{A}=\operatorname{grad}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)-4\pi\boldsymbol{j} \tag{19}$$

$$\Delta\varphi=-4\pi\rho \tag{20}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A}=0 \tag{21}$$

上の方程式(20)は，Poisson の方程式と一致することに注意。

Maxwell-Lorentz の方程式の解 Maxwell-Lorentz の方程式は非同次(inhomogeneous)であるから，その解は，同次方程式(homogeneous equation)の一般解と非同次方程式の特殊解とを加えれば得られる。まず

同次方程式を考える。

$$\Box \boldsymbol{A}=0, \quad \Box\varphi=0, \quad \mathrm{div}\, \boldsymbol{A}+\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0 \tag{22}$$

そこで $\partial\Lambda/\partial t=-\varphi$ によりゲージ関数を選び，ゲージ変換をすると

$$\varphi \longrightarrow 0 \tag{23}$$

ところが $\Box(\partial\Lambda/\partial t)=0$ であるから，$\Box\Lambda=0$ となるような Λ を選べる。そうすると新しいゲージでは

$$\Box \boldsymbol{A}=0, \quad \varphi=0, \quad \mathrm{div}\, \boldsymbol{A}=0 \tag{24}$$

このポテンシャルは，同時に Lorentz ゲージにも Coulomb ゲージにも属する。したがって(24)を解くことによって，両ゲージの共通解を求めることができる。さて，このゲージでは

$$\boldsymbol{E}=-\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}, \qquad \boldsymbol{H}=\mathrm{rot}\, \boldsymbol{H} \tag{25}$$

この解を平面波に展開すると，その一般解は横波を重ね合わせたものになっている。これについては後に詳しく論ずるから，ここではこれ以上立ち入らない。

このような両ゲージの共通解を $\boldsymbol{A}_{\mathrm{in}}(x)$, $\varphi_{\mathrm{in}}(x)$ と書くことにする†。そうすると，非同次な Maxwell–Lorentz の方程式(15),(16),(17)の遅延解は次のように与えられる。ただし遅延解とは，**1.** 章で議論した意味での因果律を満たす解のことである。

$$\boldsymbol{A}(x)=\boldsymbol{A}_{\mathrm{in}}(x)+4\pi\int d^4x' D_{\mathrm{ret}}(x-x')\boldsymbol{j}(x') \tag{26}$$

$$\varphi(x)=\varphi_{\mathrm{in}}(x)+4\pi\int d^4x' D_{\mathrm{ret}}(x-x')\rho(x') \tag{27}$$

ただし D_{ret} は $m=0$ のときの Δ_{ret} を意味する。したがって

$$\Box D_{\mathrm{ret}}(x)=-\delta^4(x) \tag{28}$$

また(26),(27)の解は ρ と $\boldsymbol{j}$ とが連続の方程式を満たしていれば自動的に Lorentz 条件を満たしている††。

さて $D_{\mathrm{ret}}(x)$ の積分表示は

$$D_{\mathrm{ret}}(x)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k \frac{e^{i\boldsymbol{kx}-ik_0t}}{\boldsymbol{k}^2-(k_0+i\varepsilon)^2} \tag{29}$$

---

† 実は $\varphi_{\mathrm{in}}(x)=0$ であるが，形式的には他のゲージでも成り立つ解を書いておく。すなわちもっと一般的な Lorentz ゲージをとったときも同時に考えられるように書いておく。

†† このことは A_{in} と φ_{in} とが Lorentz 条件を満たしていればいつでも成り立つ。Coulomb ゲージとの共通解でないときでもよい。

で与えられる。この表示を用いて上記の**遅延解**あるいは**遅延ポテンシャル** (retarded potential)をもっと見なれた形に変形してみよう。そのためにまず次の積分を考える。

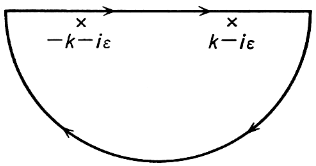
$$4\pi\int D_{\rm ret}(x-x')\rho(\boldsymbol{x}',t')d^3x'dt'$$
$$=\frac{4\pi}{(2\pi)^4}\int d^4k\int d^3x'dt'\frac{e^{i\boldsymbol{k}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')-k_0(t-t')}}{\boldsymbol{k}^2-(k_0+i\varepsilon)^2}\rho(\boldsymbol{x}',t') \tag{30}$$

そこで $t'=t-(t-t')=t-\varDelta$ とおくと，上の積分は次の形に書かれる。

$$\frac{4\pi}{(2\pi)^4}\int d^4k\int d^3x'd\varDelta\frac{e^{i\boldsymbol{k}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')-ik_0\varDelta}}{\boldsymbol{k}^2-(k_0+i\varepsilon)^2}\rho(\boldsymbol{x}',t-\varDelta) \tag{31}$$

ところが $D_{\rm ret}$ の性質より，$D_{\rm ret}$ は $\varDelta>0$ のときだけしか生き残らない。したがって $\varDelta$ に関する積分領域は $\varDelta>0$ とすることができる。このとき $e^{-ik_0\varDelta}$ は k_0 の複素平面を考えると下半面において解析的である。そこで k_0 積分を行なうにあたって，2·1 図にあるような積分路を選ぶことにする。まず k_0 積分を実行すると，k_0 を含む積分の形は次のようになる。

$$\int dk_0\frac{e^{-ik_0\varDelta}}{\boldsymbol{k}^2-(k_0+i\varepsilon)^2}\quad(\varDelta>0) \tag{32}$$



2·1 図　複素 k_0 平面における積分路と極の位置

いま $\boldsymbol{k}^2=k^2$ と書くと，下半面には二つの極

$$k_0=k-i\varepsilon,\qquad k_0=-k-i\varepsilon$$

があるから，Cauchy の定理に従って留数を求めてみると，留数は $k_0=k-i\varepsilon$ において $-e^{-ik\varDelta}/2k$, $k_0=-k-i\varepsilon$ において $e^{ik\varDelta}/2k$ となる。ただし ε はすでに 0 とおいてある。したがって(32)式の積分の値は

$$(32)=-2\pi i\frac{1}{2k}(e^{ik\varDelta}-e^{-ik\varDelta})=\frac{2\pi}{k}\sin k\varDelta \tag{33}$$

ただし $2\pi i$ の前のマイナスは積分路が右回りだからである。このようにして全体の積分の形は

$$\frac{(4\pi)(2\pi)}{(2\pi)^4}\int d^3k\int d^3x'd\varDelta\frac{e^{i\boldsymbol{kr}}}{k}\sin k\varDelta\,\rho(\boldsymbol{x}',t-\varDelta)\qquad(\boldsymbol{r}=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') \tag{34}$$

次に $\boldsymbol{k}$ に対して極座標を導入する。$\boldsymbol{k}$ と $\boldsymbol{r}$ との間の角を θ とすると

$$d^3k=k^2dk\sin\theta\,d\theta\,d\varphi \tag{35}$$

したがって(34)式は

$$(34)=\frac{1}{\pi}\int d^3x'\int d\varDelta\left\{\int k^2dk\sin\theta\,d\theta\frac{e^{ikr\cos\theta}}{k}\sin k\varDelta\right\}\rho(\boldsymbol{x}',t-\varDelta) \tag{36}$$

ところが括弧の中の積分は

$$\{\,/\!/\,\}=\frac{2}{r}\int_0^\infty dk\sin kr\sin k\varDelta$$

$$=\frac{1}{r}\int_0^\infty dk\{\cos k(r-\varDelta)-\cos k(r+\varDelta)\}\qquad (r>0,\ \varDelta>0)$$

$$=\frac{\pi}{r}\delta(r-\varDelta) \tag{37}$$

したがってもともとの積分(30)は，次の形に書かれる。

$$\int d^3x'\frac{\rho(\boldsymbol{x}',t-r)}{r}\qquad (r=|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|) \tag{38}$$

この結果を用いて(26), (27)を書きかえると

$$\boldsymbol{A}(x)=\boldsymbol{A}_{\mathrm{in}}(x)+\int d^3x'\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}',t-r)}{r} \tag{39}$$

$$\varphi(x)=\varphi_{\mathrm{in}}(x)+\int d^3x'\frac{\rho(\boldsymbol{x}',t-r)}{r} \tag{40}$$

という見なれた形の遅延ポテンシャルが得られる。

自由場に対するハミルトニアン　自由な電磁場に対しては(24)で規定され，Lorentz と Coulomb の両ゲージに共通なゲージをとることにする。そしていま考えている場が $V=L^3$ の体積の立方体の中に入っているとする。そこで次の境界条件を課する。

“ベクトル・ポテンシャル $\boldsymbol{A}$ は，x, y, z のそれぞれの変数について周期 L をもつ周期関数である。”

こうすると，$\boldsymbol{A}$ は微分方程式と境界条件が与えられているから，次のような固有関数による展開を許すことになる。

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t)=\sum_\lambda q_\lambda(t)\boldsymbol{A}_\lambda(\boldsymbol{x}) \tag{41}$$

ここに λ は固有関数の番号を表わし，ベクトルを表わす添字ではない。(24)に代入して変数分離をすると，

$$\Delta\boldsymbol{A}_\lambda(\boldsymbol{x})+k_\lambda{}^2\boldsymbol{A}_\lambda(\boldsymbol{x})=0,\qquad \mathrm{div}\,\boldsymbol{A}_\lambda(\boldsymbol{x})=0 \tag{42}$$

が空間座標の固有関数 $\boldsymbol{A}_\lambda(\boldsymbol{x})$，およびそれに対応する固有値 k_λ を決める。この式は周期性の境界条件の下に解かれなければならない。また係数 q_λ は次のような運動方程式を満たす。

$$\ddot{q}_\lambda(t)+k_\lambda{}^2q_\lambda(t)=0 \tag{43}$$

ただしドットは時間微分を表わす。固有値 k_λ はすぐわかるように方程式(24)と境界条件により決定される。また固有関数の**直交規格化**は Gauss 単位系では

$$\int \boldsymbol{A}_\lambda(\boldsymbol{x})\boldsymbol{A}_\mu(\boldsymbol{x})d^3x=4\pi\delta_{\lambda\mu} \tag{44}$$

とおく。そうすると固有関数は次のように書ける。

$$\sqrt{8\pi}\,\boldsymbol{e}_\lambda\frac{\cos \boldsymbol{k}_\lambda\boldsymbol{x}}{\sqrt{V}},\qquad \sqrt{8\pi}\,\boldsymbol{e}_\lambda\frac{\sin \boldsymbol{k}_\lambda\boldsymbol{x}}{\sqrt{V}} \tag{45}$$

ただし $\boldsymbol{e}_\lambda$ は**偏極ベクトル**(polarization vector)とよばれ，波の**伝播ベクトル**(propagation vector) $\boldsymbol{k}_\lambda$ と直交する。これは方程式(18)の結果である。

$$\boldsymbol{k}_\lambda\boldsymbol{e}_\lambda=0 \tag{46}$$

また周期性の条件により $\boldsymbol{k}_\lambda$ のとりうる値は

$$\boldsymbol{k}_\lambda=\frac{2\pi}{L}\boldsymbol{n}_\lambda \qquad (n_{\lambda x},\ n_{\lambda y},\ n_{\lambda z}\ \text{は整数}) \tag{47}$$

さて変数分離の最も重要なことは，最初の偏微分方程式が無限個の常微分方程式(43)に変形されることである。これは調和振動子の方程式であるから，そのハミルトニアンは次のように与えられる。

$$H_\lambda=\frac{1}{2}(p_\lambda{}^2+k_\lambda{}^2q_\lambda{}^2) \tag{48}$$

q_λ の方程式(43)は，次の正準方程式から直ちに導き出される。

$$\dot{p}_\lambda=-\frac{\partial H}{\partial q_\lambda},\qquad \dot{q}_\lambda=\frac{\partial H_\lambda}{\partial p_\lambda} \tag{49}$$

したがって全系のハミルトニアンは次式で与えられる。

$$H=\sum_\lambda H_\lambda \tag{50}$$

要するに，自由な電磁場は無限個の調和振動子の系と数学的に同等である。

次にこのハミルトニアンが電磁場のエネルギーに等しいことを証明しよう。すなわち，証明すべき式は

$$U=\frac{1}{8\pi}\int_V(\boldsymbol{E}^2+\boldsymbol{H}^2)d^3x=\sum_\lambda H_\lambda \tag{51}$$

まず $\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{H}$ とを展開すると，

$$\boldsymbol{E}=-\dot{A}=-\sum_\lambda \dot{q}_\lambda\boldsymbol{A}_\lambda=-\sum_\lambda p_\lambda\boldsymbol{A}_\lambda \tag{52}$$

$$\boldsymbol{H}=\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}=\sum_\lambda q_\lambda\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}_\lambda \tag{53}$$

したがって

$$U=\frac{1}{8\pi}\int_V d^3x\left\{\left(\sum_\lambda p_\lambda\boldsymbol{A}_\lambda\right)^2+\left(\sum_\lambda q_\lambda\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}_\lambda\right)^2\right\} \tag{54}$$

$\boldsymbol{A}_\lambda$ の間の直交性および境界条件を用いると，この積分が遂行できて

$$U=\frac{1}{2}\sum_{\lambda}(p_{\lambda}^2+k_{\lambda}^2q_{\lambda}^2)=H$$

ゆえに(50)のハミルトニアンは電磁場のエネルギーという意味ももつことがわかった。

上の定式化を量子論にもち込むためには，固有関数として sine，cosine を使うよりも exponential を使う方が便利である。そこで次の展開を導入する。

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t)=\sum_{\lambda}\{q_{\lambda}(t)\boldsymbol{A}_{\lambda}(\boldsymbol{x})+q_{\lambda}{}^*(t)\boldsymbol{A}_{\lambda}{}^*(\boldsymbol{x})\} \tag{55}$$

ただし

$$\boldsymbol{A}_{\lambda}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{e}_{\lambda}\sqrt{\frac{4\pi}{V}}e^{i\boldsymbol{k}_{\lambda}\boldsymbol{x}},\qquad q_{\lambda}=|q_{\lambda}|e^{-ik_{\lambda}t}\qquad(k_{\lambda}=|\boldsymbol{k}_{\lambda}|) \tag{56}$$

こうすると $q_{\lambda}\boldsymbol{A}_{\lambda}$ は $\boldsymbol{k}_{\lambda}$ の方向に光速度で進む波を表わすことになる。$\boldsymbol{n}_{\lambda}$ の成分は整数であれば正でも負でもよい。sine，cosine のときには 2 重に数えないように注意が必要であるが，今度はその心配がない。直交規格化条件は

$$\int\boldsymbol{A}_{\lambda}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{A}_{\mu}{}^*(\boldsymbol{x})d^3x=\int\boldsymbol{A}_{\lambda}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{A}_{-\mu}(\boldsymbol{x})d^3x=4\delta_{\lambda\mu} \tag{57}$$

ただし $\boldsymbol{A}_{-\mu}$ は $\boldsymbol{A}_{\mu}$ から $(\boldsymbol{k}_{\mu},\boldsymbol{e}_{\mu})\to(-\boldsymbol{k}_{\mu},\boldsymbol{e}_{\mu})$ のおきかえで得られる。この表示では q_{λ} も $q_{\lambda}{}^*$ も実数ではないから

$$Q_{\lambda}=q_{\lambda}+q_{\lambda}{}^*,\qquad P_{\lambda}=-ik_{\lambda}(q_{\lambda}-q_{\lambda}{}^*)=\dot{Q}_{\lambda} \tag{58}$$

を導入すると，これが前の q_{λ}，p_{λ} に相当し

$$H_{\lambda}=\frac{1}{2}(P_{\lambda}{}^2+k_{\lambda}{}^2Q_{\lambda}{}^2)=2k_{\lambda}{}^2q_{\lambda}q_{\lambda}{}^* \tag{59}$$

荷電粒子が存在する場合の電磁場のハミルトニアン 外場がない場合の荷電粒子のハミルトニアンを $H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})$ とすると，外場が存在する場合のハミルトニアンは

$$H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p}-e\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}))+e\varphi(\boldsymbol{x}) \tag{60}$$

で与えられる。荷電粒子がたくさんある場合には，粒子系のハミルトニアンは

$$H_{\text{particles}}=\sum_{s=1}^{N}\{H_s(\boldsymbol{x}_s,\boldsymbol{p}_s-e_s\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_s))+e_s\varphi(\boldsymbol{x}_s)\} \tag{61}$$

したがって電磁場を外場と考えず独立な力学系として取り扱えば，全系のハミルトニアンは次のようになる。

$$H=H_{\text{particles}}+H_{\text{em}} \tag{62}$$

ただし H_{em} は電磁場のハミルトニアンである。H_{em} は自由な電磁場に対

してはすでに求めたが，相互作用がある場合には変わってくるのでこれを改めて調べよう。まず Maxwell-Lorentz の方程式から出発する。すなわち方程式系(15)，(16)，(17)である。ここですべての場の量は前と同様に周期的であると仮定する。今度は一般に $\varphi \neq 0$ であるから，次のような技巧を導入する。$\boldsymbol{A}$ を二つの部分に分解する。

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2 \tag{63}$$

ただし

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A}_1=\operatorname{rot} \boldsymbol{A}_2=0 \tag{64}$$

この分解は Coulomb ゲージにおけるゲージ変換を除いて一意的である。

$\boldsymbol{A}_1$ に対しては自由場のときと同じ展開を行なう。

$$\boldsymbol{A}_1(\boldsymbol{x}, t)=\sum_\lambda q_\lambda(t)\boldsymbol{A}_\lambda(\boldsymbol{x}), \qquad \boldsymbol{A}_2(\boldsymbol{x}, t)=\sum_\sigma q_\sigma(t)\boldsymbol{A}_\sigma(\boldsymbol{x}) \tag{65}$$

すなわち，この展開では自由場のときと同じ $\boldsymbol{A}_\lambda$ を用いるのである。$\boldsymbol{A}_\sigma$ の方程式は

$$\Delta\boldsymbol{A}_\sigma+k_\sigma{}^2\boldsymbol{A}_\sigma=0 \tag{66}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{A}_\sigma=0 \tag{67}$$

ところが(67)より，$\boldsymbol{A}_\sigma$ は次のように書ける。

$$\boldsymbol{A}_\sigma=\frac{1}{k_\sigma}\operatorname{grad}\psi_\sigma \tag{68}$$

ゆえに ψ_σ を決める条件は，周期性のほかに次の微分方程式となる。

$$\Delta\psi_\sigma+k_\sigma{}^2\psi_\sigma=0 \tag{69}$$

さて，$\boldsymbol{A}_\lambda$ と $\boldsymbol{A}_\sigma$ とは直交することが次のように示される。まず恒等式

$$\begin{aligned}&\int_V d^3x\{(\operatorname{rot}\boldsymbol{A}_\sigma\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{A}_\lambda)+\operatorname{div}\boldsymbol{A}_\sigma\cdot\operatorname{div}\boldsymbol{A}_\lambda+\boldsymbol{A}_\sigma\Delta\boldsymbol{A}_\lambda\}\\ &=\int_S dS\{\boldsymbol{A}_\sigma\times\operatorname{rot}\boldsymbol{A}_\lambda+\boldsymbol{A}_\sigma\operatorname{div}\boldsymbol{A}_\lambda\}_n\end{aligned} \tag{70}$$

において，右辺の表面積分は周期性のために消える。また左辺の第一項と第二項とは $\operatorname{rot}\boldsymbol{A}_\sigma=0$, $\operatorname{div}\boldsymbol{A}_\lambda=0$ のために消える。したがって残るものは左辺第三項のみとなる。ゆえに

$$\int_V d^3x\boldsymbol{A}_\sigma\Delta\boldsymbol{A}_\lambda=-k_\lambda{}^2\int_V d^3x\boldsymbol{A}_\sigma\boldsymbol{A}_\lambda=0 \tag{71}$$

これで $\boldsymbol{A}_\sigma$ と $\boldsymbol{A}_\lambda$ との直交性が証明された。

次にスカラー・ポテンシャルのことを調べよう。

$$\varphi(\boldsymbol{x}, t)=\sum_\sigma q_{0\sigma}(t)\varphi_\sigma(\boldsymbol{x}) \tag{72}$$

ただし固有関数 φ_σ は，他の固有関数と同様に周期性の条件を満たし，かつ

$$\Delta\varphi_\sigma+k_\sigma{}^2\varphi_\sigma=0 \tag{73}$$

を満たす。これを(69)と比較すれば，方程式も境界条件も全く同じだから

$$\psi_\sigma = \varphi_\sigma \tag{74}$$

を用いることができる。φ_σ の**規格直交化**は

$$\int_V d^3x \varphi_\sigma \varphi_\rho = \int d^3x \boldsymbol{A}_\sigma \boldsymbol{A}_\rho = 4\pi\delta_{\rho\sigma} \tag{75}$$

次に Lorentz 条件を q で表わすと

$$k_\sigma q_\sigma = \dot{q}_{0\sigma} \tag{76}$$

同様にして他の Maxwell–Lorentz の式を q で表わすことができる。

$$\ddot{q}_\lambda + k_\lambda{}^2 q_\lambda = \sum_{s=1}^{N} e_s \{\boldsymbol{v}_s \cdot \boldsymbol{A}_\lambda(\boldsymbol{x}_s)\} \tag{77}$$

$$\ddot{q}_\sigma + k_\sigma{}^2 q_\sigma = \sum_{s=1}^{N} e_s \{\boldsymbol{v}_s \cdot \boldsymbol{A}_\sigma(\boldsymbol{x}_s)\} \tag{78}$$

$$\ddot{q}_{0\sigma} + k_\sigma{}^2 q_{0\sigma} = \sum_{s=1}^{N} e_s \varphi_\sigma(\boldsymbol{x}_s) \tag{79}$$

こうしてわかったことは，荷電粒子が存在するときの電磁場は，数学的に無限個の強制振動子の組と同等である。

さて古典論では Lorentz 条件(76)は**初期条件**とみなすことができる。問題はこの式がある時刻で成り立てばそのままずっと成り立つかどうかということである。そのために $q_{0\sigma}$ と q_σ とを結びつける次の微分方程式を導き出す。(78)と(79)とを組み合わせると

$$\begin{aligned}
\dddot{q}_{0\sigma} + k_\sigma{}^2 \dot{q}_{0\sigma} &= \frac{d}{dt}\sum_{s=1}^{N} e_s \varphi_\sigma(\boldsymbol{x}_s) \\
&= \sum_{s=1}^{N} e_s \{\boldsymbol{v}_s \cdot \mathrm{grad}\, \varphi_\sigma(\boldsymbol{x}_s)\} \qquad (\boldsymbol{v}_s = \dot{\boldsymbol{x}}_s) \\
&= k_\sigma \sum_{s=1}^{N} e_s \{\boldsymbol{v}_s \cdot \boldsymbol{A}_\sigma(\boldsymbol{x}_s)\} \\
&= k_\sigma(\ddot{q}_\sigma + k_\sigma{}^2 q_\sigma)
\end{aligned} \tag{80}$$

すなわち

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + k_\sigma{}^2\right)(k_\sigma q_\sigma - \dot{q}_{0\sigma}) = 0 \tag{81}$$

これは時間について2階の線形微分方程式であるから，ある時刻で

$$k_\sigma q_\sigma - \dot{q}_{0\sigma} = 0, \qquad k_\sigma \dot{q}_\sigma - \ddot{q}_{0\sigma} = 0 \tag{82}$$

が成り立てば，Lorentz 条件(76)はすべての時刻で成り立つことになる。

上の条件を場の量を使って表わせば，(81)に相当するのは

$$\Box\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathrm{div}\, \boldsymbol{A}\right) = -4\pi\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\, \boldsymbol{j}\right) = 0 \tag{83}$$

ゆえに Lorentz 条件(13)は，ある時刻，たとえば $t=0$ で

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}=0, \qquad \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}\right)=0 \qquad (t=0) \tag{84}$$

が成り立てば，任意の時刻に成り立つことになる。この第二の条件は次のような式で表わされる。

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}\right)&=\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}+\mathrm{div}\left(\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\right)\\&=\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}-\mathrm{div}\,\boldsymbol{E}-\Delta\varphi\\&=4\pi\rho-\mathrm{div}\,\boldsymbol{E}\end{aligned} \tag{85}$$

ゆえに $t=0$ での初期条件として

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}=0, \qquad \mathrm{div}\,\boldsymbol{E}=4\pi\rho \tag{86}$$

これで全系のハミルトニアンは

$$H=\sum_{s=1}^{N}H_s+\sum_{\lambda}H_\lambda+\sum_{\sigma}H_\sigma \tag{87}$$

ただし第一項は荷電粒子，第二項は横波，第三項は縦波とスカラー波に対応し，特に H_σ は次式で与えられる。

$$H_\sigma=\frac{1}{2}(p_\sigma{}^2+k_\sigma{}^2q_\sigma{}^2)-\frac{1}{2}(p_{0\sigma}{}^2+k_\sigma{}^2q_{0\sigma}{}^2) \tag{88}$$

これで電磁場の方程式の正準化が完了した。正準方程式は

$$\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{x}_s}=-\dot{\boldsymbol{p}}_s, \qquad \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}_s}=\dot{\boldsymbol{x}}_s \qquad \text{粒子} \tag{89}$$

$$\frac{\partial H}{\partial q_\lambda}=-\dot{p}_\lambda, \qquad \frac{\partial H}{\partial p_\lambda}=\dot{q}_\lambda \qquad \text{横波} \tag{90}$$

$$\frac{\partial H}{\partial q_\sigma}=-\dot{p}_\sigma, \qquad \frac{\partial H}{\partial p_\sigma}=\dot{q}_\sigma \qquad \text{縦波} \tag{91}$$

$$\frac{\partial H}{\partial q_{0\sigma}}=-\dot{p}_{0\sigma}, \qquad \frac{\partial H}{\partial p_{0\sigma}}=\dot{q}_{0\sigma} \qquad \text{スカラー波} \tag{92}$$

これらの方程式から前に導いた方程式を導き出すことができる。Lorentz ゲージを使うことの利点は，4元ポテンシャルの4成分を対等に扱い，したがって Lorentz 不変性を明らかにすることができることである。欠点は H_σ が正定値にならないことである。しかし Lorentz 条件により負エネルギー解を避けることができる。形式的な相対論的不変性がなくても実用上たいせつなのは Coulomb ゲージである。そこで次に Coulomb ゲージにおけるハミルトニアンを求めてみよう。

Coulomb ゲージにおける正準形式 Coulomb ゲージでの場の方程式は

$$-\Box \boldsymbol{A}+\mathrm{grad}\,\dot{\varphi}=4\pi \boldsymbol{j} \tag{19}$$

$$\Delta\varphi=-4\pi\rho \tag{20}$$

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}=0 \tag{21}$$

まず Poisson の方程式を解くと，静電ポテンシャル φ が求められる。

$$\varphi(\boldsymbol{x})=\sum_{s=1}^{N}\frac{e_s}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_s|} \tag{93}$$

さてこの場合には(21)により，ベクトル・ポテンシャル $\boldsymbol{A}$ は横波だけを使って展開することができる†。以下 Coulomb ゲージの量にダッシュをつけて，Lorentz ゲージと区別する。まず(19)を $\boldsymbol{A}_\lambda$ で展開してその係数をとり出すと

$$\ddot{q}_\lambda'+k_\lambda^2 q_\lambda'=\sum_{s=1}^{N}e_s\{\boldsymbol{v}_s\cdot\boldsymbol{A}_\lambda(\boldsymbol{x}_s')\} \tag{94}$$

次に Poisson の方程式は

$$k_\sigma^2 q_{0\sigma}'=\sum_{s=1}^{N}e_s\varphi_\sigma(\boldsymbol{x}_s') \tag{95}$$

これを時間について微分すると

$$k_\sigma \dot{q}_{0\sigma}'=\sum_{s=1}^{N}e_s\{\boldsymbol{v}_s\cdot\boldsymbol{A}_\sigma(\boldsymbol{x}_s')\} \tag{96}$$

これは実は第一の方程式(19)の縦成分である。しかしこの方程式は，Poisson の方程式があれば自動的に出るから考える必要はない。(95)から明らかなように，$q_{0\sigma}'$ は粒子座標で表わされるから独立変数ではない。したがって独立変数は $\boldsymbol{x}_s'$, $\boldsymbol{p}_s'$, q_λ', p_λ' だけである。このように独立変数の数が非常に少ないことが，Coulomb ゲージの利点である。そこで q_λ の方程式(94)と荷電粒子の方程式の出るようなハミルトニアンを探してみると

$$H'=\sum_{s=1}^{N}H_s\Big(\boldsymbol{x}_s',\ p_s'-e_s\sum_\lambda q_\lambda'\boldsymbol{A}_\lambda(\boldsymbol{x}_s')\Big)+\frac{1}{2}\sum_{i,j}\frac{e_ie_j}{r_{ij}}$$
$$+\sum_\lambda\frac{1}{2}(p_\lambda'^2+k_\lambda^2 q_\lambda'^2)\qquad(\text{ただし } r_{ij}=|\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{x}_j|) \tag{97}$$

ここで Coulomb ポテンシャルは粒子のハミルトニアン(61)のスカラー・ポテンシャルの項から出てくる。このとき $i=j$ に相当する発散項が入ってくるが，これは微分すれば消えるから運動方程式には影響を与えないので落としておく。そうすると

† もちろんこのときには横波の固有関数 $\boldsymbol{A}_\lambda$ の完全性を仮定している。

$$H' = \sum_{s=1}^{N} H_s(\boldsymbol{x}_s', \boldsymbol{p}_s' - e_s \sum_\lambda q_\lambda' \boldsymbol{A}_\lambda(\boldsymbol{x}_s')) + \sum_{i>j} \frac{e_i e_j}{r_{ij}} + H_\lambda' \qquad (98)$$

が Coulomb ゲージでのハミルトニアンになる。今後この本ではもっぱら Coulomb ゲージを使うので，今後はダッシュを落とす。

Lorentz ゲージと Coulomb ゲージとはお互いに正準変換で結ばれているが，この変換は大変複雑であるし，後の議論とは関係がないのでこの本では省略する。しかしこの変換について知りたい読者は，Heitler の教科書を参照されたい(p. 78 脚注)。

2-2 電磁場の量子化

一度ある力学系の正準形式ができあがれば，その系を量子化することは直ちにできる。ただ電磁場の場合，あるいは一般的に場を考える場合，自由度が無限大であるという新しい事態が生ずる。このためにいわゆる発散の困難に遭遇するが，本書ではこのような問題は場の量子論に譲り，発散の出ないような問題のみを議論することにしよう。

まず Coulomb ゲージにおける横波の量子化の問題から始めよう。

$$\boldsymbol{A} = \sum_\lambda (q_\lambda \boldsymbol{A}_\lambda + q_\lambda^* \boldsymbol{A}_\lambda^*), \qquad \mathrm{div}\, \boldsymbol{A}_\lambda = 0 \qquad (1)$$

相互作用の有無にかかわらず，固有関数として次のようにとれる。

$$\boldsymbol{A}_\lambda = \sqrt{\frac{4\pi}{V}} \boldsymbol{e}_\lambda e^{i\boldsymbol{k}_\lambda \boldsymbol{x}} \qquad (2)$$

正準変数は前節で述べたように

$$Q_\lambda = q_\lambda + q_\lambda^*, \qquad P_\lambda = -ik_\lambda(q_\lambda - q_\lambda^*) \qquad (3)$$

また一つの固有振動を表わすハミルトニアンは

$$H_\lambda = \frac{1}{2}(P_\lambda^2 + k_\lambda^2 Q_\lambda^2) \qquad (4)$$

この系を量子化するには，P_λ と Q_λ とを**正準交換関係**を満たす演算子とみなせばよい。

$$[Q_\lambda, P_\lambda] = i \qquad (\hbar = 1) \qquad (5)$$

あるいはもっと一般化して

$$[Q_\lambda, P_\mu] = i\delta_{\lambda\mu} \qquad (6)$$

そうすると H_λ の固有値 E_λ は，よく知られているように次式で与えられる。

$$E_\lambda=\left(n_\lambda+\frac{1}{2}\right)k_\lambda \qquad (n_\lambda=0,\ 1,\ 2,\ \cdots) \tag{7}$$

さて調和振動子の理論から Q_λ, P_λ の行列表示が知られているから直ちに

$$q_{n,\,n+1}=\sqrt{\frac{n+1}{2k}}, \qquad q^*_{n+1,\,n}=\sqrt{\frac{n+1}{2k}}, \qquad \text{他の行列要素}=0 \tag{8}$$

が一つの振動子に対して成り立つ。また q 同士の交換関係は

$$q_\lambda q_\mu-q_\mu q_\lambda=q_\lambda{}^*q_\mu{}^*-q_\mu{}^*q_\lambda{}^*=0 \tag{9}$$

$$q_\lambda q_\mu{}^*-q_\mu{}^*q_\lambda=\frac{1}{2k_\lambda}\delta_{\lambda\mu} \tag{10}$$

上の固有値(7)は，光電効果と関連して Einstein が提唱した**光量子仮説**の基礎づけとして用いられる。さて全系のエネルギー固有値は

$$E=\sum_\lambda E_\lambda=\sum_\lambda n_\lambda k_\lambda+\frac{1}{2}\sum_\lambda k_\lambda \tag{11}$$

この第二項を**零点エネルギー**と称する。この項は発散するが実害はない。それは古典論から量子論への移行が一意的でないこととも関係している。たとえば，前節(59)を古典論の範囲内で

$$H_\lambda=2k_\lambda{}^2q_\lambda q_\lambda{}^* \longrightarrow 2k_\lambda{}^2q_\lambda{}^*q_\lambda \tag{12}$$

と書き直しておけば，新しい H_λ は

$$H_\lambda=2k_\lambda{}^2q_\lambda{}^*q_\lambda=\frac{1}{2}(P_\lambda{}^2+k_\lambda{}^2Q_\lambda{}^2)-\frac{1}{2}k_\lambda \tag{13}$$

したがって新しい全系のエネルギーは

$$E=\sum_\lambda n_\lambda k_\lambda \tag{14}$$

となり，発散する零点エネルギーは消えてしまう。今後この新しい表示をとることにする。

次に電場，磁場を考えてみる。いままでの議論は Schrödinger 表示でも，Heisenberg 表示でも同様に成り立ち，違うのは q_λ 等が時間の関数になっていないか，それともなっているかということだけである。さて電場 $\boldsymbol{E}$ を計算するには時間微分がいるが，それには次の公式を使う。

$$\dot{\boldsymbol{A}}=i[H,\ \boldsymbol{A}] \tag{15}$$

こうすると

$$\boldsymbol{E}=-\dot{\boldsymbol{A}}=i\sum_\lambda k_\lambda(q_\lambda\boldsymbol{A}_\lambda-q_\lambda{}^*\boldsymbol{A}_\lambda{}^*) \tag{16}$$

$$\boldsymbol{H}=\mathrm{rot}\ \boldsymbol{A}=i\sum_\lambda(q_\lambda\boldsymbol{k}_\lambda\times\boldsymbol{A}_\lambda-q_\lambda{}^*\boldsymbol{k}_\lambda\times\boldsymbol{A}_\lambda{}^*) \tag{17}$$

ただし $\boldsymbol{A}_\lambda$ は(2)で定義されている。また $\boldsymbol{k}_\lambda$, $\boldsymbol{e}_\lambda$, $\boldsymbol{k}_\lambda\times\boldsymbol{e}_\lambda$ はお互いに直交している。

次に古典論における全系の運動量は **Poynting ベクトル**で与えられる。

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}&=\frac{1}{4\pi}\int_V d^3x\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}\\&=\frac{1}{4\pi}\sum_\lambda\int d^3x\boldsymbol{E}_\lambda\times\boldsymbol{H}_\lambda\\&=\sum_\lambda\boldsymbol{k}_\lambda(2k_\lambda q_\lambda{}^*q_\lambda)\end{aligned}\tag{18}$$

ところが $2k_\lambda q_\lambda{}^*q_\lambda$ の固有値は(12), (14)から明らかなように n_λ であるから，$\boldsymbol{P}$ の固有値をやはり $\boldsymbol{P}$ と書けば

$$\boldsymbol{P}=\sum_\lambda n_\lambda\boldsymbol{k}_\lambda\tag{19}$$

ここで n_λ を 0, 1, 2, ⋯ という固有値をとる演算子(**number operator** とよばれる)とみなせば，(19)は演算子の式と考えてもよい。さて(14)と(19)とを組み合わせると，n_λ はエネルギーが k_λ で運動量が $\boldsymbol{k}_\lambda$ となる粒子の数を表わしていると解釈できる。この粒子が光子(photon)である。また $\boldsymbol{k}_\lambda{}^2-k_\lambda{}^2=0$ であるから，光子の質量は0であり，したがって常に光速度で進むことになる。光は光子から成り立つから，これは当然のことである。ここで注意すべきことは，ポテンシャル $\boldsymbol{A}$ の展開に出てきた固有関数 $\boldsymbol{A}_\lambda$ は光の波動性を表わし，係数 q_λ が粒子性を表わすことであって，粒子性・波動性の**二重性**(duality)は場を量子化することによってはじめて理解できるのである。

次に相互作用が存在する場合に，Coulomb ゲージでのハミルトニアンは

$$H=\sum_\lambda H_\lambda+\sum_{s=1}^N H_s\Big(\boldsymbol{x}_s,\ \boldsymbol{p}_s-e_s\sum_\lambda\{q_\lambda\boldsymbol{A}_\lambda(\boldsymbol{x}_s)+q_\lambda{}^*\boldsymbol{A}_\lambda{}^*(\boldsymbol{x}_s)\}\Big)+\sum_{i>j}\frac{e_ie_j}{r_{ij}}\tag{20}$$

そして交換関係は

$$q_\lambda q_\mu{}^*-q_\mu{}^*q_\lambda=\frac{1}{2k_\lambda}\delta_{\lambda\mu},\quad [x_{si},\ p_{s'j}]=i\delta_{ss'}\delta_{ij}\quad (i,\ j\ \text{は空間成分})\tag{21}$$

で与えられ，これによってこの相互作用をしている系の量子論的記述ができることになる。

生成・消滅演算子　さていままで q_λ, $q_\lambda{}^*$ を粒子性を表わす演算子として用いてきたが，

$$q_\lambda=\frac{1}{\sqrt{2k_\lambda}}a_\lambda,\quad q_\lambda{}^*=\frac{1}{\sqrt{2k_\lambda}}a_\lambda{}^*\tag{22}$$

で定義される a_λ, $a_\lambda{}^*$ を用いた方がいろいろと便利である。そうすると

$$n_\lambda=a_\lambda{}^*a_\lambda,\quad a_\lambda a_\mu{}^*-a_\mu{}^*a_\lambda=\delta_{\lambda\mu}\tag{23}$$

またポテンシャルの展開は

$$A_\lambda=\sqrt{4\pi}\sum_\lambda\left(a_\lambda e_\lambda\frac{e^{ik_\lambda x}}{\sqrt{2k_\lambda V}}+a_\lambda{}^*e_\lambda\frac{e^{ik_\lambda x}}{\sqrt{2k_\lambda V}}\right) \tag{24}$$

さて a_λ は n_λ を一つ減らし，$a_\lambda{}^*$ は n_λ を一つふやすので，それぞれを**消滅演算子**(destruction operator)，**生成演算子**(creation operator)とよぶ。

光子の状態を表わす**状態ベクトル**(state vector)は各種の光子の数を指定することによって与えられる。そこで一般の状態は

$$\Psi=\sum_{n_1,n_2,\cdots}c(n_1,\ n_2,\ \cdots)\Psi_{n_1,n_2,\cdots} \tag{25}$$

ここに

$$H_\lambda\Psi_{n_1,\cdots,n_\lambda,\cdots}=n_\lambda k_\lambda\Psi_{n_1,\cdots,n_\lambda,\cdots} \tag{26}$$

特にすべての n_λ が 0 であるような状態を**真空**(vacuum)とよぶ。一般にどんな状態も真空に生成演算子を作用させることにより得られる。たとえば

$$a_\lambda{}^*a_\mu{}^*\Psi_0 \qquad (\Psi_0\text{ は真空を表わす}) \tag{27}$$

は λ 光子が 1 個，μ 光子が 1 個存在するような状態を表わす。また一般に

$$\frac{1}{\sqrt{l!\,m!}}(a_\lambda{}^*)^l(a_\mu{}^*)^m\Psi_0 \tag{28}$$

は l 個の λ 光子と m 個の μ 光子とが存在する状態を示す規格化された状態ベクトルを表わす。規格化が正しく行なわれていることを見るためには次のような方法を用いる。すなわち

$$(\Psi_0,\ (a_\lambda)^l(a_\lambda{}^*)^l\Psi_0)=f(l)$$

とおいたときに，次のように $f(l)=l!$ となることより明らかである。

$$\begin{aligned}
f(l)&=(\Psi_0,\ (a_\lambda)^{l-1}a_\lambda(a_\lambda{}^*)^l\Psi_0)\\
&=(\Psi_0,\ (a_\lambda)^{l-1}[a_\lambda,\ (a_\lambda{}^*)^l]\Psi_0) \qquad (a_\lambda\Psi_0=0\text{ に注意})\\
&=l(\Psi_0,\ (a_\lambda)^{l-1}(a_\lambda{}^*)^{l-1}\Psi_0)\\
&=lf(l-1)\\
&=l!\,f(0) \qquad [f(0)=(\Psi_0,\ \Psi_0)=1]\\
&=l!
\end{aligned}$$

2-3 電磁場と電子との相互作用

前節で電磁場と電子とが共存する系のハミルトニアンを作ったが，電子のハミルトニアンとして具体的に Dirac のものを使うと

$$H_{\text{electron}}=\sum_{s=1}^{N}(\boldsymbol{\alpha}_s\boldsymbol{p}_s+\beta_s m) \tag{1}$$

$$H_{\text{interaction}}=-e\sum_{s=1}^{N}\boldsymbol{\alpha}_s\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_s)+\sum_{i>j}\frac{e^2}{r_{ij}} \tag{2}$$

$$H_{\text{radiation}}=\sum_{\lambda}H_\lambda=\frac{1}{8\pi}\int d^3x(\boldsymbol{E}^2+\boldsymbol{H}^2) \tag{3}$$

したがって Schrödinger 方程式は，状態ベクトル $\Psi(t)$ に対して次の形で与えられる。

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Psi(t)=(H_{\text{rad}}+H_{\text{elec}}+H_{\text{int}})\Psi(t) \tag{4}$$

このハミルトニアンでは，電子は量子化せず一電子理論のものを使っているので，電子数は変わらず，陽電子のことは考えていない。電子が1個しかなければ

$$H=\boldsymbol{\alpha p}+\beta m-e\boldsymbol{\alpha A}(\boldsymbol{x})+H_{\text{rad}} \tag{5}$$

非相対論的近似においては，多電子系に対しては

$$H=\sum_{s=1}^{N}\frac{\{\boldsymbol{p}_s-e\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})\}^2}{2m}+\sum_{i>j}\frac{e^2}{r_{ij}}+H_{\text{rad}} \tag{6}$$

一電子系に対しては

$$H=\frac{\{\boldsymbol{p}-e\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})\}^2}{2m}+H_{\text{rad}} \tag{7}$$

次の章では，主に一電子系の問題を議論するが，上に書いたハミルトニアンに対して付加項として原子核による Coulomb ポテンシャルが加わる。

2-4 摂動論

さて電磁場と電子とが共存する系の量子論的取り扱いの基礎はできあがったが，実際に計算をすることになるとどうしても近似の問題を考えなければならない。そこで最も一般的で，電子系の問題では十分実用性をもっている**摂動論**について少し詳しく調べることにしよう。

相互作用表示 摂動論では常にハミルトニアンを二つの部分に分ける。この場合には

$$H=H_0+H_{\text{int}} \tag{1}$$

のように自由場および自由粒子のハミルトニアンを H_0 とし，相互作用を摂動として扱う。したがって H_0 は次のように書かれる。

$$H_0=H_{\text{elec}}+H_{\text{rad}} \tag{2}$$

さて Schrödinger 方程式は，全ハミルトニアンを用いて

$$i\frac{\partial \Psi(t)}{\partial t}=H\Psi(t) \tag{3}$$

そこで次のユニタリー変換を導入する。

$$\Phi(t)=e^{itH_0}\Psi(t) \tag{4}$$

そうすると $\Phi(t)$ に対する方程式は次のようになる。

$$i\frac{\partial \Phi(t)}{\partial t}=H_{\text{int}}(t)\Phi(t) \tag{5}$$

ただし

$$H_{\text{int}}(t)=e^{itH_0}H_{\text{int}}e^{-itH_0} \tag{6}$$

Schrödinger 表示では状態ベクトルが， Heisenberg 表示では演算子が時間依存性をもっているが， 方程式(5)に現われた表示では両者とも時間に依存する。また相互作用のない場合に Heisenberg 表示に帰着する。このような表示を**相互作用表示**とよぶ。方程式(5)は，時間を含んだ摂動論(time-dependent perturbation theory)の基礎方程式である。

いま二つの時刻 t_0, t における Φ を結びつける変換 $U(t, t_0)$ を

$$\Phi(t)=U(t, t_0)\Phi(t_0) \qquad (t>t_0) \tag{7}$$

により定義する。そうすると明らかに

$$U(t_0, t_0)=1 \tag{8}$$

が成り立ち，また(7)を(5)に代入すれば $U(t, t_0)$ の従うべき方程式が得られる。

$$i\frac{\partial}{\partial t}U(t, t_0)=H_{\text{int}}(t)U(t, t_0) \tag{9}$$

そこで上の方程式を t につき t_0 から t まで積分し，(8)を初期条件として使うと，次の積分方程式が得られる。

$$U(t, t_0)=1-i\int_{t_0}^{t}dt\,H_{\text{int}}(t)U(t, t_0) \tag{10}$$

この U を**変換行列**，または**変換関数**とよぶ。

遷移確率 さて $t=t_0$ で $\Phi=\Phi_i$ であったとして，$t=t$ で Φ_f という状態にある確率は

$$|(\Phi_f,\ U(t, t_0)\Phi_i)|^2=|U(t, t_0)_{fi}|^2 \tag{11}$$

で与えられる。特に $U-1$ は**遷移振幅**を与える。いま $t_0\to-\infty$ とする。このことは入射粒子が連続的に入ってきて，散乱粒子も連続的に出ていくことを意味する。さて単位時間あたりの**遷移確率**は

$$w=\frac{1}{t-t_0}|U(t, t_0)_{fi}|^2 \tag{12}$$

で与えられる。これは一般には t と t_0 との複雑な関数である。しかし $t-t_0\to\infty$ の極限では，w はある一定の値に収束する。実験では，通常 $t-t_0$ は，原子とか原子核とかの周期と比べてはるかに長いから，実際問題として我々が測定しているのは次のような極限値である。

$$w=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}|U(T, -T)_{fi}|^2 \tag{13}$$

そこで我々が必要とするものは，簡単に書くと $U(\infty, -\infty)$ である。そこで $U(\infty, -\infty)$ の計算法を考えてみよう。一般的な方法は存在しないから，ここでは摂動論による計算法を示す。すなわち，$H_{\rm int}$ に関するべき展開を利用する。量子電磁力学では**微細構造定数**(fine structure constant) $\alpha=e^2/\hbar c\approx 1/137$ が実際の展開のパラメーターとなる。このためには，積分方程式(10)を**逐次代入法**(iteration method)で解いてみる。

$$U(t, -\infty)=1-i\int_{-\infty}^{t}dt'H_{\rm int}(t')$$
$$+(-i)^2\int_{-\infty}^{t}dt'H_{\rm int}(t')\int_{-\infty}^{t'}dt''H_{\rm int}(t'')+\cdots \tag{14}$$

そこで上の式で (f, i) という行列要素をとると

$$U(t, -\infty)_{fi}=\delta_{fi}-i\int_{-\infty}^{t}dt'H_{\rm int}(t')_{fi}$$
$$+(-i)^2\int_{-\infty}^{t}dt'\int_{-\infty}^{t'}dt''\sum_n H_{\rm int}(t')_{fn}H_{\rm int}(t'')_{ni}+\cdots \tag{15}$$

さて次に t に関する積分を実行するためには，$H_{\rm int}(t)$ の行列要素の t 依存性を具体的に知らなければならないが，それには方程式(6)を利用する。いま f, i, n 等の状態がすべて H_0 の固有状態であると仮定しよう(そうでない場合には，H_0 の固有状態で展開すればよい)。そうすると，たとえば

$$\begin{aligned}H_{\rm int}(t)_{fi}&=\langle f|e^{itH_0}H_{\rm int}e^{-itH_0}|i\rangle\\&=e^{itE_f}(H_{\rm int})_{fi}e^{-itE_i}\\&=e^{it(E_f-E_i)}(H_{\rm int})_{fi}\end{aligned} \tag{16}$$

この結果を代入して積分をしようとすると，我々は次のような不定積分に出あう。

$$\int_{-\infty}^{t}dt'e^{it'(E_f-E_i)} \tag{17}$$

この不定性を除くために収束因子 $e^{\varepsilon t'}$ を導入し，積分の後で $\varepsilon\to +0$ の極

限をとると，

$$\int_{-\infty}^{t} dt' e^{it'(E_f-E_i)+\varepsilon t'} = \frac{e^{it(E_f-E_i)+\varepsilon t}}{i(E_f-E_i)+\varepsilon} \tag{18}$$

この結果を用いると，$H_{\rm int}$ を簡単に H と書き，

$$\begin{aligned} U(t,\ -\infty)_{fi} &= \delta_{fi} + e^{it(E_f-E_i)} \\ &\times \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\frac{H_{fi}}{E_i-E_f+i\varepsilon} + \sum_n \frac{H_{fn}}{E_i-E_f+2i\varepsilon}\cdot\frac{H_{ni}}{E_i-E_n+i\varepsilon}\right. \\ &\left. + \sum_n\sum_{n'} \frac{H_{fn'}}{E_i-E_f+3i\varepsilon}\cdot\frac{H_{n'n}}{E_i-E_{n'}+2i\varepsilon}\cdot\frac{H_{ni}}{E_i-E_n+i\varepsilon} + \cdots\right) \end{aligned} \tag{19}$$

もし有限項しか残さなければ，$\cdots 3\varepsilon$, 2ε をただの ε でおきかえてよい。そうすると(19)はもっと簡単化できて(以下では $\lim\limits_{\varepsilon\to+0}$ を省略する)

$$U(t,\ -\infty)_{fi} = \delta_{fi} + \frac{e^{it(E_f-E_i)}}{E_i-E_f+i\varepsilon}\left(H_{fi} + \sum_n \frac{H_{fn}H_{ni}}{E_i-E_n+i\varepsilon} + \cdots\right) \tag{20}$$

S 行列 次に S 行列を定義する。

$$S = U(\infty,\ -\infty) = \lim_{t\to\infty} U(t,\ -\infty) \tag{21}$$

この極限を遂行するには次の公式を用いる。

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} \frac{ie^{it(E_f-E_i)}}{E_i-E_f+i\varepsilon} &= \lim_{t\to\infty}\int_{-\infty}^{t} dt' e^{it'(E_f-E_i)} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dt' e^{it'(E_f-E_i)} \\ &= 2\pi\delta(E_f-E_i) \end{aligned} \tag{22}$$

したがって S 行列の具体的な形は次のように書ける。

$$S_{fi} = \delta_{fi} - 2\pi i\delta(E_f-E_i)T_{fi} \tag{23}$$

$$\begin{aligned} T_{fi} &= H_{fi} + \sum_n \frac{H_{fn}H_{ni}}{E_i-E_n+i\varepsilon} \\ &+ \sum_n\sum_{n'} \frac{H_{fn'}H_{n'n}H_{ni}}{(E_i-E_{n'}+i\varepsilon)(E_i-E_n+i\varepsilon)} + \cdots \end{aligned} \tag{24}$$

$f\neq i$ とすると，遷移確率は

$$(2\pi)^2\{\delta(E_f-E_i)\}^2|T_{fi}|^2 \tag{25}$$

ところが

$$\begin{aligned} 2\pi\{\delta(E_f-E_i)\}^2 &= 2\pi\delta(0)\delta(E_f-E_i) \\ &= \lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T} e^{i0t}dt\,\delta(E_f-E_i) \\ &= \lim_{T\to\infty} 2T\,\delta(E_f-E_i) \end{aligned} \tag{26}$$

ゆえに単位時間あたりの遷移確率は

$$w_{fi} = 2\pi\delta(E_f-E_i)|T_{fi}|^2 \tag{27}$$

前にある因子 $\delta(E_f-E_i)$ はエネルギーの保存則を表わしている。さて多くの問題ではエネルギーのみでなく運動量も保存する。このときには

$$2\pi T_{fi}=\delta^3(\boldsymbol{P}_f-\boldsymbol{P}_i)t_{fi} \tag{28}$$

とおくと，

$$S_{fi}=\delta_{fi}-it_{fi}\delta^4(P_f-P_i) \tag{29}$$

さて(28)のような T_{fi} に対して $|T_{fi}|^2$ を計算するときに $\delta^3(0)$ が出るが，これは時間の $\delta(0)$ の場合と同様に計算すると

$$\delta^3(0)=\frac{V}{(2\pi)^3} \tag{30}$$

となる。そこで f が n 粒子状態であるときに，n 粒子の位相体積すなわち状態の数を乗じると次の公式が得られる。

$$dw_{fi}=\frac{V}{(2\pi)^4}\delta^4(P_f-P_i)V\frac{d^3p_1}{(2\pi)^3}\cdots V\frac{d^3p_n}{(2\pi)^3}|t_{fi}|^2 \tag{31}$$

そして $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{p}_n$ について積分すれば，終状態に n 粒子があるような場合の全遷移確率が求まる。

断面積の公式　この遷移確率と断面積との関係は，$N=v_{\rm rel}/V$ と考えると

$$v_{\rm rel}\sigma_{fi}=Vw_{fi} \tag{32}$$

より出すことができる。ただし $v_{\rm rel}$ は i 状態で衝突する2粒子間の**相対速度**である。

さて(31)と(32)とを組み合わせると

$$d\sigma_{fi}=\frac{4\pi^2}{v_{\rm rel}}\left\{V\frac{d^3p_1}{(2\pi)^3}\right\}\cdots\left\{V\frac{d^3p_n}{(2\pi)^3}\right\}|t_{fi}|^2\left\{\frac{V}{(2\pi)^3}\right\}^2\delta^4(P_f-P_i) \tag{33}$$

次にこの微分断面積が V によらないことを証明しよう。この証明ができたら $V\to\infty$ の極限をとることができるからである。そのためには t_{fi} の V 依存性を調べてみよう。そして t_{fi} をもっと詳細に書くと

$$t_{fi}=\langle\boldsymbol{p}_1,\ \boldsymbol{p}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{p}_n|t|\boldsymbol{p}_1{}^0,\ \boldsymbol{p}_2{}^0\rangle \tag{34}$$

ただし初期状態 i には2粒子 $\boldsymbol{p}_1{}^0$, $\boldsymbol{p}_2{}^0$ が存在するとしている。

さて一般に粒子の個数が変わるのは場を量子化したときに初めて起こる現象である。電磁場は量子化してあるが，電子場はまだ量子化していないので電子の数は変化しない。そこでここでは主に $n=2$ の場合について考えるが，ここに示す処法は全く一般的で $n>2$ の場合にも使うことができる。

たとえば，電子・電子散乱を考えると，その波動関数は初期状態では

$$\frac{u(p_1{}^0)}{\sqrt{V}}e^{i\boldsymbol{p}_1{}^0\boldsymbol{x}}, \quad \text{および} \quad \frac{u(p_2{}^0)}{\sqrt{V}}e^{i\boldsymbol{p}_2{}^0\boldsymbol{x}}$$

であり，終状態では

$$\frac{u(p_1)}{\sqrt{V}}e^{i\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{x}}, \quad \text{および} \quad \frac{u(p_2)}{\sqrt{V}}e^{i\boldsymbol{p}_2\boldsymbol{x}}$$

である。ただし行列要素の計算では，後者は複素共役の形で入る。ゆえに

$$\langle \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2|t|\boldsymbol{p}_1{}^0, \boldsymbol{p}_2{}^0\rangle \propto V^{-2}$$

となり，したがって上の断面積の式は V によらないことがわかる。次に

$$\langle \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2|\mathcal{M}|\boldsymbol{p}_1{}^0, \boldsymbol{p}_2{}^0\rangle = \sqrt{E_1E_2}\langle \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2|t|\boldsymbol{p}_1{}^0, \boldsymbol{p}_2{}^0\rangle\sqrt{E_1{}^0E_2{}^0} \qquad (35)$$

とおくと，$\mathcal{M}$ は t と違って V を除くと Lorentz 不変になる。この証明には再び場の量子論が必要になるので省略する。断面積が V によらないことを利用して $V=(2\pi)^3$ とおくと，断面積を $\mathcal{M}$ で表わす公式は

$$\sigma = \frac{4\pi^2}{B}\int\frac{d^3p_1}{E_1}\cdots\int\frac{d^3p_n}{E_n}|\mathcal{M}_{fi}|^2\delta^4(P_f-P_i) \qquad (36)$$

となる。この表式は Lorentz 不変であることが証明できる。ただし B は

$$\begin{aligned} B &= \sqrt{|\boldsymbol{p}_1{}^0E_2{}^0-\boldsymbol{p}_2{}^0E_1{}^0|^2-|\boldsymbol{p}_1{}^0\times\boldsymbol{p}_2{}^0|^2} \\ &= \sqrt{(p_1{}^0\cdot p_2{}^0)^2-m_1{}^2m_2{}^2} \qquad (37) \end{aligned}$$

で定義され，重心系および実験室系では $E_1{}^0E_2{}^0v_{\mathrm{rel}}$ に帰着する。すなわち，このような系では

$$v_{\mathrm{rel}} = |\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2| = \frac{|\boldsymbol{p}_1{}^0|}{E_1{}^0}+\frac{|\boldsymbol{p}_2{}^0|}{E_2{}^0}$$

となり，したがって

$$E_1{}^0E_2{}^0v_{\mathrm{rel}} = E_2{}^0|\boldsymbol{p}_1{}^0|+E_1{}^0|\boldsymbol{p}_2{}^0| = B$$

公式(36)を Møller の公式とよぶ。

断面積の公式を $a+b\to c+d$ のような $n=2$ の場合に応用してみる。(36)の積分を重心系で行なうとして，入射粒子の運動量を $\boldsymbol{q}$, $-\boldsymbol{q}$ とし，散乱粒子の運動量を $\boldsymbol{p}$, $-\boldsymbol{p}$ とすると

$$\begin{aligned} &\int\frac{d^3p_1}{E_1}\int\frac{d^3p_2}{E_2}\delta^4(P_i-P_f)\cdots \qquad (\boldsymbol{p}_1=\boldsymbol{p},\ \boldsymbol{p}_2=-\boldsymbol{p}) \\ &= \int\frac{d^3p}{E_1E_2}\delta^4(E_1+E_2-W)\cdots \qquad (38) \end{aligned}$$

ただし $W=E_1{}^0+E_2{}^0$ は重心系における全エネルギーである。極座標を導入し，

$$E_1+E_2 = \sqrt{M_1{}^2+\boldsymbol{p}^2}+\sqrt{M_2{}^2+\boldsymbol{p}^2}$$

および

$$\int \delta(f(x))dx = \frac{1}{|f'(x_0)|} \qquad [\text{ただし } f(x_0)=0]$$

を用いると，(38)の積分は

$$(38) = \int \frac{p^2 dp\, d\Omega}{E_1 E_2} \delta(E_1 + E_2 - W) \cdots$$

$$= \frac{p}{W} \int d\Omega \cdots$$

したがって重心系で $B=qW$ を使えば，$V=(2\pi)^3$ のときに次の公式が得られる。

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{2\pi}{W}\right)^2 \frac{p}{q} |\mathcal{M}_{fi}|^2 \tag{39}$$

この公式はすでに 1-15 の電子・電子散乱の断面積を出すのに使われている。

演習問題 2.

1. 量子化された電磁場に対して次の同時交換関係を証明せよ。

$$[E_r(\boldsymbol{x}), E_s(\boldsymbol{y})] = [H_r(\boldsymbol{x}), H_s(\boldsymbol{y})] = 0$$

$$[E_r(\boldsymbol{x}), H_s(\boldsymbol{y})] = -4\pi i \varepsilon_{rsa} \frac{\partial}{\partial x_a} \delta^3(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})$$

ただし ε_{rsa} は，(rsa) が $(1\,2\,3)$ の偶置換のときに $+1$，奇置換のときに -1，その他のときに 0 になる記号である。

2. $\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{H}$ とに対する量子力学的正準方程式を求めよ。ただし自由な電磁場の場合を考えよ。

3. 電磁場の量子論の応用

3-1 輻射の放出と吸収

まず原子による光の放出と吸収とについて調べてみよう。簡単のために水素原子を考えると，Coulomb ゲージで，そして Schrödinger 近似で次のようになる。

$$H_{\mathrm{elec}}=\frac{(\boldsymbol{p}-e\boldsymbol{A})^2}{2m}-\frac{e^2}{r}-\frac{e}{2m}\boldsymbol{\sigma H} \tag{1}$$

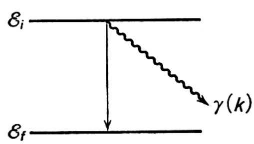
$$H=H_{\mathrm{elec}}+H_{\mathrm{rad}} \tag{2}$$

そして摂動論を使うために全体のハミルトニアンを次のように分離する。

$$H_0=\frac{\boldsymbol{p}^2}{2m}-\frac{e^2}{r}+H_{\mathrm{rad}} \tag{3}$$

$$H'=-\frac{e}{m}\boldsymbol{pA}+\frac{e^2}{2m}\boldsymbol{A}^2-\frac{e}{2m}\boldsymbol{\sigma H} \tag{4}$$

もしも H' がなければ水素原子の励起状態は安定である。しかし H' があると，励起状態は光子を出して低いエネルギー準位に落ちる。



3·1 図 原子の励起状態 $\mathcal{E}_i$ は，エネルギー k の光子を出してもっと低い準位 $\mathcal{E}_f$ に落ちる。

さてこの過程の起きる遷移確率は

$$w_{fi}=2\pi\delta(E_f-E_i)|T_{fi}|^2 \tag{5}$$

あるいは，もっと精密には

$$dw=2\pi V\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\delta(E_f-E_i)|T_{fi}|^2 \tag{6}$$

いま Born 近似を採用すると $T_{fi}\approx H'_{fi}$ であるから，上の式は†

$$dw\approx V\frac{d^3k}{(2\pi)^2}\delta(\mathcal{E}_f+k-\mathcal{E}_i)|H'_{fi}|^2 \tag{7}$$

† $E_i=\mathcal{E}_i$, $E_f=\mathcal{E}_f+k$

ただし，$\mathcal{E}_i$ は最初の励起状態のエネルギー準位，$\mathcal{E}_f$ は低い準位，k は放出される光子のエネルギーを表わしている。k について積分すると (7)は

$$V\frac{k^2d\Omega}{(2\pi)^2}|H'_{fi}|^2 \tag{8}$$

になる。さて H' としては $-(e/m)\boldsymbol{pA}$ のみを残す。その理由は後に述べる。さて

$$\boldsymbol{A}=\sqrt{\frac{4\pi}{V}}\sum_\lambda \boldsymbol{e}_\lambda\frac{1}{\sqrt{2k_\lambda}}(a_\lambda e^{i\boldsymbol{k}_\lambda \boldsymbol{x}}+a_\lambda{}^*e^{-i\boldsymbol{k}_\lambda \boldsymbol{x}}) \tag{9}$$

であるが，この中で一つの与えられた $(\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{e})$ に対応する光子状態を選ぶと，

$$\langle \boldsymbol{k},\ \boldsymbol{e}|\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})|0\rangle=\sqrt{\frac{2\pi}{kV}}\boldsymbol{e}e^{-i\boldsymbol{kx}} \tag{10}$$

この形を H'_{fi} に代入すると

$$H'_{fi}=\langle \boldsymbol{k},\ \boldsymbol{e}\,;\ \mathcal{E}_f|H'|0\,;\ \mathcal{E}_i\rangle=-e\sqrt{\frac{2\pi}{kV}}\int\psi_f{}^*(\boldsymbol{x})\frac{\boldsymbol{pe}}{m}\psi_i(\boldsymbol{x})e^{-i\boldsymbol{kx}}d^3x \tag{11}$$

いま**電気的双極子近似**(electric dipole approximation)を使って†，

$$e^{-i\boldsymbol{kx}}\longrightarrow 1 \tag{12}$$

というおきかえをする。この近似の妥当性については後に論ずる。そうすると，H_0 の固有関数に対しては

$$\frac{\boldsymbol{p}}{m}=\dot{\boldsymbol{x}}=i[H_0,\ \boldsymbol{x}]$$

が成り立つから，e.d. 近似では

$$\begin{aligned}H'_{fi}&=-ie\sqrt{\frac{2\pi}{kV}}(\mathcal{E}_f-\mathcal{E}_i)\int\psi_f{}^*(\boldsymbol{x})\boldsymbol{xe}\psi_i(\boldsymbol{x})d^3x\\&=ie\sqrt{\frac{2\pi k}{V}}\int\psi_f{}^*(\boldsymbol{x})\boldsymbol{xe}\psi_i(\boldsymbol{x})d^3x\end{aligned} \tag{13}$$

ただし，エネルギーの保存則 $\mathcal{E}_i-\mathcal{E}_f=k$ を用いている。この形を遷移確率の式に入れると

$$\begin{aligned}dw&=V\frac{k^2d\Omega}{(2\pi)^2}e^2\frac{2\pi k}{V}\left|\int\psi_f{}^*(\boldsymbol{x})\boldsymbol{xe}\psi_i(\boldsymbol{x})d^3x\right|^2\\&=\frac{k^3d\Omega}{2\pi}e^2\left|\int\psi_f{}^*(\boldsymbol{x})\boldsymbol{xe}\psi_i(\boldsymbol{x})d^3x\right|^2\end{aligned} \tag{14}$$

当然のことながら，この結果は V によらないので，$V\to\infty$ と考えてよい。また光子の偏極を指定しないときには，偏極 $\boldsymbol{e}$ の可能な 2 方向についても和をとらなければならない。そのうえで光子の可能なすべての方向について積分すれば，単位時間あたりの崩壊の確率が得られる。

† この近似を e.d. 近似と略称する。

電気的双極子近似　(11)の積分は複雑であるし，またあまり正確にやっても意味がないので(12)の近似を導入した。そこでこの近似の妥当性を調べてみよう。水素原子またはそれの一般化では，$|\boldsymbol{x}|$ の平均値の大きさは Bohr 半径の程度である。

$$\langle|\boldsymbol{x}|\rangle \sim a \sim \frac{1}{me^2 Z} \tag{15}$$

また k は，束縛エネルギーの程度であるから

$$k \sim me^4 Z^2 \tag{16}$$

したがって

$$\langle \boldsymbol{kx} \rangle \sim Ze^2 = Z\alpha = \frac{Z}{137} \tag{17}$$

となり，Z があまり大きい数でなければ，$\boldsymbol{kx}$ の平均値は1よりずっと小さい。それで(12)の e.d. 近似が妥当性をもつことになる。原子核などでは k が大きくなるから，指数関数を展開して初めの何項かを残すことになる。それにより，もっと高い多重極の効果がとり入れられる。次に**磁気的相互作用**について考えてみると

$$\frac{\left\langle -\dfrac{e}{2m}\boldsymbol{\sigma H}\right\rangle}{\left\langle \dfrac{e}{m}\boldsymbol{pA}\right\rangle} \sim \frac{k/m}{v} \sim \frac{k/m}{\langle \boldsymbol{kx}\rangle} \sim \frac{1}{m\langle|\boldsymbol{x}|\rangle} \sim Ze^2 \tag{18}^{\dagger}$$

ただし v は電子の速度を表わしている。したがって**磁気的二重極**(磁気的双極子)の効果は，電気的四重極の効果と同程度となり，ここの計算では省略した。またあらっぽい評価では

$$w \sim k^3 e^2 a^2 \sim \frac{(ka)^2}{137} k \sim \left(\frac{1}{137}\right)^3 k \tag{19}$$

これから w を評価すると

optical region	$10^8\ \mathrm{sec}^{-1}$
X-ray region	$10^{11}\ \mathrm{sec}^{-1}$
γ-ray region	$10^{14}\ \mathrm{sec}^{-1}$

が得られる。そこで次に e.d. 近似ではどのような遷移が許されるかという**選択規則**(selection rule)について調べてみよう。

e.d. 近似における遷移行列要素は次の積分に比例する。

$$e\int \psi_f{}^* \boldsymbol{x} \psi_i \, d^3x \tag{20}$$

† すでに **1.** 章で知ったように v の平均値は Ze^2 で与えられる。

このときに原子内の電子の波動関数を

$$\psi=R_{nl}(r)Y_{l,m}(\theta,\varphi) \tag{21}$$

と書くことにすると，$\boldsymbol{k}$ の方向を z 軸に選んだ場合に $e_z=0$ であるから

$$\begin{aligned}2\boldsymbol{ex}&=(e_x+ie_y)(x-iy)+(e_x-ie_y)(x+iy)\\&\propto(e_x+ie_y)Y_{1,-1}+(e_x-ie_y)Y_{1,1}\end{aligned} \tag{22}$$

ゆえに積分(20)の角変数部分は

$$(e_x+ie_y)\int Y^*_{l_f,m_f}Y_{1,-1}Y_{l_i,m_i}d\Omega+(e_x-ie_y)\int Y^*_{l_f,m_f}Y_{1,1}Y_{l_i,m_i}d\Omega \tag{23}$$

に比例する。ゆえに(23)が生き残るのは

$$\Delta m=m_f-m_i=\pm1,\qquad \Delta l=l_f-l_i=\pm1 \tag{24}$$

の場合だけである。$\Delta l=0$ が禁止されるのは，パリティの保存のためである。また $\Delta m=-1$（第一項）となる場合には光は右偏光，$\Delta m=+1$（第二項）となる場合には光は左偏光となることがわかる。このような角運動量の変化は，放出された光子が角運動量を運んでゆくからである。選択規則(24)で許される種々の遷移には名前がついている。

$np\to1s$	principal series
$ns\to2p$	sharp series
$nd\to2p$	diffuse series
$nf\to3d$	fundamental series

水素原子における $2p\to1s$ 遷移　具体的な例として最も簡単な水素原子をとり，$2p\to1s$ という遷移を考えよう。具体的計算をするには m_f について和をとり，m_i について平均してもよいし，m_i については何か一つ特別な値を仮定してもよい。前者の意味で計算すると

$$\begin{aligned}w&=\frac{k^3 4\pi}{2\pi}e^2\frac{2}{3}\left|\int\psi_f{}^*\boldsymbol{x}\psi_i\,d^3x\right|^2_{\text{av sum}}\\&=\frac{4}{3}e^2k^3\left|\int\psi_f{}^*\boldsymbol{x}\psi_i\,d^3x\right|^2_{\text{av sum}}\end{aligned} \tag{25†}$$

このように角積分が直ちに行なえるのは，絶対値の2乗の所が方向によらなくなってしまうからである。さて波動関数の具体的な形は

$$\psi_{1s}=\frac{1}{\sqrt{\pi a^3}}e^{-r/a},\qquad \psi_{2p}=\frac{1}{4\sqrt{2\pi a^3}}e^{-r/2a}\frac{(x\text{ or }y\text{ or }z)}{a} \tag{26}$$

この問題では m_i について平均をとると

---

† (14)と比べて 2/3 という因子がついたのは，偏極の可能な方向が，3次元空間で2方向に限られるということからきている。

$$\left|\int \psi_f{}^* x\psi_i\, d^3x\right|^2_{\mathrm{av}} = \frac{1}{3}\sum_{m_i}\left|\int \psi_f{}^* x\psi_i\, d^3x\right|^2$$
$$= \left|\int \psi_f{}^* z\psi_{i,z}\, d^3x\right|^2 \qquad (27)$$

ただし $\psi_{i,z}$ は，(26)の $2p$ の波動関数で z に比例するものをとることを意味し，この問題では m_f に関する和をとることは必要ない。さて

$$\left|\int \psi_f{}^* z\psi_{i,z}\, d^3x\right|^2 = \left|\int \psi_{1s} z\psi_{2p,z}\, d^3x\right|^2$$
$$= \left|\frac{1}{4\pi a^3\sqrt{2}}\int e^{-3r/2a}\frac{z^2}{a}d^3x\right|^2$$
$$= \frac{1}{32\pi^2 a^8}\left|\frac{1}{3}\int e^{-3r/2a}r^4 dr\, d\Omega\right|^2$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{32\times 24}{81\times 9}\right)^2 a^2 \qquad (28)$$

ゆえに

$$w = \frac{1}{2}\left(\frac{32\times 24}{81\times 9}\right)^2 \times \frac{4}{3}e^2k^3a^2 \qquad (29)$$

ところで，この問題に限って考えれば

$$k = \mathcal{E}_i - \mathcal{E}_f = \frac{me^4}{2}\left(1-\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{8}me^4$$

$$ka = \frac{3}{8}e^2$$

ゆえに

$$w = \left(\frac{16}{81}\right)^2 \alpha^5 m \approx 0.04\alpha^5 m \qquad (30)$$

これを CGS 単位系の秒に直すには

$$m \to \frac{mc^2}{\hbar} = (3.86\times 10^{-11}\ \mathrm{cm})^{-1}\times(3\times 10^{10}\ \mathrm{cm\ sec^{-1}})$$
$$= 0.78\times 10^{21}\ \mathrm{sec^{-1}} \qquad (31)$$

$$w \approx 0.04\times\left(\frac{1}{137}\right)^5\times 0.78\times 10^{21}\ \mathrm{sec^{-1}} \approx 0.6\times 10^9\ \mathrm{sec^{-1}} \qquad (32)$$

したがって $2p$ 状態の平均寿命は

$$\tau = \frac{1}{w} \approx 1.6\times 10^{-9}\ \mathrm{sec} \qquad (33)$$

ただし $2p$ 状態の存在確率は指数法則に従って減少し，

$$e^{-t/\tau} = e^{-wt}\ \text{ or }\ e^{-\Gamma t} \qquad (34)$$

CGS 単位では，$\Gamma = w\hbar$ はエネルギーの次元をもち，**準位幅**とよばれ，準位のエネルギーの不確定性を表わしている。すなわち

$$\Delta E\Delta t \sim \hbar \qquad (35)$$

とすれば，$\Delta t=\tau$ とおいたときに，有限時間 τ しか生きていない状態に対して

$$\Delta E\sim\frac{\hbar}{\Delta t}\sim\frac{\hbar}{\tau}=\Gamma \tag{36}$$

だけのエネルギーの不確定性が生ずることになる。また励起状態の波動関数の t 依存性は，(34)からわかるように

$$\exp\left(-iEt-\frac{\Gamma}{2}t\right)=\exp\left\{-i\left(E-\frac{i}{2}\Gamma\right)t\right\} \tag{37}$$

で与えられることになる。すなわち励起状態は H_0 の固有状態ではあるが，全ハミルトニアンの固有状態ではなくなる。

輻射の吸収と Planck の公式 もし初めから光子が存在すれば，光子は原子に吸収されることができる。いま光子の運動量空間における密度分布を $\bar{n}(k)$ であるとすると，$\boldsymbol{k}$ の付近で d^3k の微小体積の中に入る光子の**強度**(intensity)は $\bar{n}(k)$ から直ちに計算できる。いま $k=|\boldsymbol{k}|$ に対する強度は

$$\begin{aligned}I_0(k)dk&=\bar{n}(k)\cdot k\cdot V\frac{k^2\,dk\,d\Omega}{(2\pi)^3}\\&=\bar{n}(k)\cdot V\cdot\frac{k^3\,dk\,d\Omega}{(2\pi)^3}\end{aligned} \tag{38}$$

さて $\bar{n}(k)\to\bar{n}(k)-1$ という吸収過程を考察してみると，

$$\langle\bar{n}(k)-1|a(\boldsymbol{k})|\bar{n}(k)\rangle=\sqrt{\bar{n}(k)} \tag{39}$$†

であるから，その吸収確率は

$$\begin{aligned}dw&=V\frac{k^2d\Omega}{(2\pi)^2}|H'_{fi}|^2\\&=V\frac{k^2d\Omega}{(2\pi)^2}\frac{e^2}{m^2}\frac{2\pi}{kV}\sum_{\boldsymbol{e}}|(\boldsymbol{pe})_{fi}|^2\bar{n}(k)\\&=\frac{k\,d\Omega}{2\pi}\cdot\frac{e^2}{m^2}\sum_{\boldsymbol{e}}|(\boldsymbol{pe})_{fi}|^2\bar{n}(k)\end{aligned} \tag{40}$$

いままでの光の放出の計算では，$\bar{n}(k)=0$ を仮定していたが，初めに光子があれば，放出過程の確率には $(\bar{n}+1)$ を乗じなければならない。したがって

$$\frac{w_{\rm emission}(\bar{n}\to\bar{n}+1)}{w_{\rm absorption}(\bar{n}\to\bar{n}-1)}=\frac{\bar{n}+1}{\bar{n}} \tag{41}$$

この関係式は重要である。特にこの結果は原子の種類によらないことをは

† $a(\boldsymbol{k})$ は，運動量 $\boldsymbol{k}$ の光子に対する消滅演算子である。

っきり示している点に注目していただきたい。この式から出発して Planck の公式を導き出す Einstein の議論を紹介しよう。

輻射が気体と熱平衡状態にあるとする。原子はいろいろな準位にあるが，この中から2準位 $\mathcal{E}_m$, $\mathcal{E}_n$ を選び，$\mathcal{E}_m > \mathcal{E}_n$ とする。そうすると $\mathcal{E}_m$ にある原子が光子を放出して，$\mathcal{E}_n$ になったり，$\mathcal{E}_n$ にある原子が光子を吸収して $\mathcal{E}_m$ になったりする。そしてこの逆過程の確率はつりあうべきである。ところで平衡状態での両者の存在確率はそれぞれ

$$\frac{\exp(-\mathcal{E}_m/kT)}{\sum_s \exp(-\mathcal{E}_s/kT)}, \quad \text{および} \quad \frac{\exp(-\mathcal{E}_n/kT)}{\sum_s \exp(-\mathcal{E}_s/kT)} \tag{42}$$

したがって**個別つりあいの原理**から

$$w_{\text{emission}} \exp(-\beta\mathcal{E}_m) = w_{\text{absorption}} \exp(-\beta\mathcal{E}_n) \tag{43}$$ †

ゆえに

$$\frac{\bar{n}+1}{\bar{n}} = \exp\{\beta(\mathcal{E}_m - \mathcal{E}_n)\} \tag{44}$$

ところが，$\mathcal{E}_m - \mathcal{E}_n = k$ であるから(44)から

$$\bar{n} = \frac{1}{e^{\beta k}-1} \tag{45}$$

ゆえに強度は，偏極の自由度からくる因子2を考慮して

$$\frac{2}{e^{\beta k}-1} \cdot V \cdot \frac{k^3 dk\, d\Omega}{(2\pi)^3} \tag{46}$$

あるいは，角度について積分して

$$\begin{aligned} I(k)dk &= \frac{2}{e^{\beta k}-1} V \frac{k^3 dk}{(2\pi)^3} \int d\Omega \\ &= \frac{8\pi k^3}{e^{\beta k}-1} V \frac{dk}{(2\pi)^3} \end{aligned} \tag{47}$$

これは自然単位で書いた **Planck の公式**である。見なれた形にするためには

$$k \longrightarrow h\nu, \qquad \beta \longrightarrow \frac{1}{kT}$$

のおきかえをしてやればよく，そうすれば Planck の定数 h も入ってくる。ただし全体の次元を合わせるように $\hbar$ と c との適当なべきを乗じなければならない。

---

† 今後 Boltzmann 定数 k と光子のエネルギーとの混同を避けるため $\beta=1/kT$ を用いる。

3-2 摂動論の改良と共鳴散乱

さて前節で励起状態 $2p$ は光を出して基底状態 $1s$ に落ちてしまい不安定であることを示した。それでは $2p$ 状態を作るにはどうしたらよいかというと，たとえば基底状態 $1s$ に光を当てればよい。そこで

$$\begin{array}{ccccc} (1s)+\gamma & \longrightarrow & (2p) & \longrightarrow & (1s)+\gamma \\ \mathcal{E}_0 \quad \boldsymbol{k}_i & & \mathcal{E}_a & & \mathcal{E}_0 \quad \boldsymbol{k}_f \end{array} \tag{1}$$

の過程を考える。ただし $\mathcal{E}_0$ は基底状態のエネルギー準位，$\mathcal{E}_a$ は励起状態のエネルギー準位，$\boldsymbol{k}_i$ は入射光子の運動量，$\boldsymbol{k}_f$ は放出される光子の運動量である。これは結局基底状態による光の散乱を表わしている。これから特に $k_i \approx \mathcal{E}_a - \mathcal{E}_0$ の所でこの問題を考えてみよう。そこでは上の過程が起きやすい。なぜならば摂動論の公式

$$T_{fi} = \sum_n \frac{H'_{fn} H'_{ni}}{E_i - E_n} \tag{2}$$

においてエネルギー分母が小さくなるからである。このような散乱を**共鳴散乱**(resonance scattering)とよぶ。ただし

$$E_i = \mathcal{E}_0 + k_i, \qquad E_n = \mathcal{E}_a, \ \cdots \tag{3}$$

ところがちょうど $\mathcal{E}_0 + k_i = \mathcal{E}_a$ の場合には分母が消えて T_{fi} が発散してしまう。この困難を避けるためにもっと高次の補正を考える。以下の議論は本質的に Weisskopf(ワイスコップ)と Wigner(ウィグナー)によるものと同じものである。

まず上の過程のくり返しを考える。

$$(1s)+\gamma \longrightarrow (2p) \longrightarrow (1s)+\gamma \longrightarrow (2p) \longrightarrow (1s)+\gamma \longrightarrow \cdots \tag{4}$$

そしてこのような中間状態に対応する摂動の高次補正を考える。

$$\begin{aligned} T_{fi} = & \frac{H'_{0,\boldsymbol{k}_f;\,a} H'_{a;\,0\boldsymbol{k}_i}}{\mathcal{E}_0 + k_i - \mathcal{E}_a + i\varepsilon} \\ & + \sum_{\boldsymbol{k}} \frac{H'_{0\boldsymbol{k}_f;\,a} H'_{a;\,0\boldsymbol{k}} H'_{0\boldsymbol{k};\,a} H'_{a;\,0\boldsymbol{k}_i}}{(\mathcal{E}_0 + k_i - \mathcal{E}_a + i\varepsilon)(\mathcal{E}_0 + k_i - \mathcal{E}_0 - k + i\varepsilon)(\mathcal{E}_0 + k_i - \mathcal{E}_a + i\varepsilon)} \\ & + \cdots \end{aligned} \tag{5}$$

ただし $\boldsymbol{k}$ は中間状態に現われる光子の運動量であり，偏極ベクトル $\boldsymbol{e}$ は省略して書いてない。ここでは特定な中間状態を残したが，このような特定の補正がたいせつなのは，$\mathcal{E}_0 + k_i - \mathcal{E}_a$ という小さいエネルギー分母が出るからである。またこの級数は等比級数となっているので直ちに和が求まる。すなわち

$$T_{fi}=\frac{H'_{0\boldsymbol{k}_f;a}H'_{a;0\boldsymbol{k}_i}}{\mathcal{E}_0+k_i-\mathcal{E}_a+i\varepsilon}\left(1+\sum_{\boldsymbol{k}}\frac{H'_{a;0\boldsymbol{k}}H'_{0\boldsymbol{k};a}}{(k_i-k+i\varepsilon)(\mathcal{E}_0+k_i-\mathcal{E}_a+i\varepsilon)}+\cdots\right)$$
$$=\frac{H'_{0\boldsymbol{k}_f;a}H'_{a;0\boldsymbol{k}_i}}{\mathcal{E}_0+k_i-\mathcal{E}_a+i\varepsilon}\left(1-\sum_{\boldsymbol{k}}\frac{H'_{a;0\boldsymbol{k}}H'_{0\boldsymbol{k};a}}{(k_i-k+i\varepsilon)(\mathcal{E}_0+k_i-\mathcal{E}_a+i\varepsilon)}\right)^{-1}$$
$$=\frac{H'_{0\boldsymbol{k}_f;a}H'_{a;0\boldsymbol{k}_i}}{\mathcal{E}_0+k_i-\mathcal{E}_a-\sum_{\boldsymbol{k}}\frac{H'_{a;0\boldsymbol{k}}H'_{0\boldsymbol{k};a}}{k_i-k+i\varepsilon}} \tag{6}$$

この結果を2次の摂動論と比較すると，明らかに分母の $\sum$ の項だけ違い，この項の存在することが改良となっている。この項があるために分母は消えない。

$$\sum_{\boldsymbol{k}}\frac{H'_{a;0\boldsymbol{k}}H'_{0\boldsymbol{k};a}}{k_i-k+i\varepsilon}=\sum_{\boldsymbol{k}}\frac{|H'_{a;0\boldsymbol{k}}|^2}{k_i-k+i\varepsilon}$$
$$=\sum_{\boldsymbol{k}}\frac{|H'_{a;0\boldsymbol{k}}|^2}{k_i-k}-\frac{i}{2}\left\{2\pi\sum_{\boldsymbol{k}}\delta(k_i-k)|H'_{a;0\boldsymbol{k}}|^2\right\}$$
$$\equiv\Delta\mathcal{E}_a(k_i)-\frac{i}{2}\Gamma_a(k_i) \tag{7}$$

ただし最後の式は $\sum$ の項を実部と虚部とに分けて定義したものである。明らかに $k_i=\mathcal{E}_a-\mathcal{E}_0$ のときに Γ_a は前に計算した崩壊幅を与える。ところで，$\Delta\mathcal{E}_a$ は励起状態 $\mathcal{E}_a$ に対する補正を表わす。すなわち補正された固有値 $\mathcal{E}_a'$ は

$$\mathcal{E}_a'=\mathcal{E}_a+\sum_n\frac{H'_{an}H'_{na}}{\mathcal{E}_a-E_n}$$
$$\approx\mathcal{E}_a+\sum_{\boldsymbol{k}}\frac{|H_{a;0\boldsymbol{k}}|^2}{\mathcal{E}_a-\mathcal{E}_0-k}$$
$$=\mathcal{E}_a+\Delta\mathcal{E}_a(\mathcal{E}_a-\mathcal{E}_0) \tag{8}$$

となり，$k_i=\mathcal{E}_a-\mathcal{E}_0$ のときに $\Delta\mathcal{E}_a(k_i)$ は $2p$ 状態の**準位のずれ**(level shift)を表わす。

k_i を変数として k と書くと，定義から

$$\Delta\mathcal{E}_a(k)=\frac{1}{2\pi}\int\frac{dk'}{k-k'}\Gamma_a(k') \tag{9}$$

の関係式が得られる。このような式を**分散公式**(dispersion relation)とよぶ。これから崩壊幅 $\Gamma_a(k)$ がわかれば準位のずれ $\Delta\mathcal{E}_a(k)$ が計算できることになる。しかし一般に量子化された場があると，準位のずれは発散する。この発散を除くためにはくり込みという処方を用いるが，これは場の量子論の問題となるのでここでは議論しないことにする。

3-3 光電効果

前節で電子が束縛状態から光子を出してもっと低い束縛状態に落ちるという過程を扱ったが，今度は束縛状態で光を吸収して散乱状態に移るという過程を考察しよう。このような過程を**光電効果**(photoelectric effect)とよぶ。すなわち光子が吸収されて電子が飛び出す過程である。

飛び出した電子の運動エネルギーを T, 原子のイオン化エネルギー(ionization energy)すなわち電子の束縛エネルギーを I, 吸収された光子のエネルギーを k とすると **Einstein の関係式**が成り立つ。

$$T=k-I \tag{1}$$

光電効果の断面積を計算するのにいろいろな近似を使うが，そのために

$$m\gg T\gg I \tag{2}$$

を仮定する。$T\gg I$ は原子から飛び出した電子が十分速く，したがって原子のまわりをうろうろせずに遠ざかり Born 近似で取り扱えるという仮定であり，$m\gg T$ は**非相対論的近似**が使えるという仮定である。第二の仮定のない場合については後に調べる。K 電子の場合には，第一の仮定は

$$T=\frac{\boldsymbol{p}^2}{2m}\gg\frac{mZ^2e^4}{2} \tag{3}$$

となるから

$$\xi=\frac{Ze^2}{v}\ll 1,\quad あるいは\ \langle v\rangle_{\mathrm{K}}\ll v \tag{4}$$

と書くことができる。さて次の過程を考察する。

$$\gamma+\text{K-electron}\longrightarrow \text{free electron} \tag{5}$$

そうすると対応する行列要素は

$$H'_{fi}=-e\sqrt{\frac{2\pi}{kV}}\int\psi_f{}^*\frac{\boldsymbol{pe}}{m}\psi_i e^{i\boldsymbol{kx}}d^3x \tag{6}$$

ここに ψ_i は K 電子の波動関数，ψ_f は飛び出していく電子の Born 近似での波動関数，すなわち平面波である。具体的には

$$\psi_i=\frac{1}{\sqrt{\pi a^3}}e^{-r/a},\qquad \psi_f=\frac{e^{i\boldsymbol{px}}}{\sqrt{V}} \tag{7}$$

ただし

$$a=\frac{1}{mZe^2}=\frac{a_0}{Z}\ (\text{Bohr 半径}),\qquad I=\frac{1}{2a^2m} \tag{8}$$

したがって

$$H'_{fi}=-e\sqrt{\frac{2}{ka^3}}\cdot\frac{1}{V}\int e^{i(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p})\boldsymbol{x}}\frac{p_e}{m}e^{-r/a}d^3x \tag{9}$$

ただし $p_e=\boldsymbol{pe}$ は演算子ではなくて定数である。$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{x}/a$ を導入すると

$$H'_{fi}=-\frac{e}{m}p_e\cdot\frac{1}{V}\cdot\sqrt{\frac{2a^3}{k}}\int e^{ia(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p})\boldsymbol{x}'}e^{-r'}d^3x'$$

$$=-\frac{e}{m}p_e\cdot\frac{1}{V}\cdot\sqrt{\frac{2a^3}{k}}\frac{8\pi}{\{1+(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p})^2a^2\}^2} \tag{10}$$

ゆえに断面積は，$v_{\mathrm{rel}}=1$ を用いて

$$d\sigma=2\pi V\cdot V\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\delta\left(k-I-\frac{p^2}{2m}\right)|H'_{fi}|^2 \tag{11}$$

あるいは

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=32\int p^2dp\delta\left(k-I-\frac{p^2}{2m}\right)\left(\frac{e}{m}\right)^2p_e{}^2\cdot\frac{a^3}{k}\cdot\frac{1}{(1+q^2a^2)^4} \tag{12}$$
$$q^2=(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p})^2$$

ここで $a^{-1}\equiv b=\langle p\rangle_{\mathrm{K}}=m\langle v\rangle_{\mathrm{K}}$ を導入すると便利である。そうすると $I=b^2/2m$.

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=32\left(\frac{e}{m}\right)^2\frac{mpp_e{}^2b^5}{(b^2+q^2)^4k} \tag{13}$$

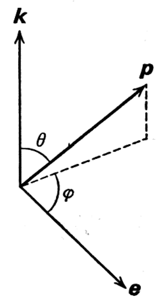
次に $\boldsymbol{k}$ の方向を z 軸に選び，$\boldsymbol{e}$ の方向を x 軸に選んで極座標を導入し，3·2 図のように θ, φ を定義すると

$$q^2=p^2+k^2-2pk\cos\theta \tag{14}$$

$$p_e=p\sin\theta\cos\varphi \tag{15}$$

またこのとき k は

$$k=T+I=\frac{1}{2m}(p^2+b^2)\ll m \tag{16}$$



3·2 図
$\boldsymbol{k}$ を z 軸，$\boldsymbol{e}$ を x 軸とする極座標系

そこで

$$b^2+q^2=b^2+q^2+k^2-2pk\cos\theta$$
$$=k(2m+k-2p\cos\theta)$$
$$=2mk\left(1+\frac{k}{2m}-\frac{p}{m}\cos\theta\right)$$
$$\approx 2mk(1-v\cos\theta)\qquad (p\sim\sqrt{2mk}\gg k) \tag{17}$$

ゆえに断面積は

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\left(\frac{e^2}{m}\right)^2Z^5\alpha^4\left(\frac{m}{k}\right)^{7/2}\frac{4\sqrt{2}\sin^2\theta\cos^2\varphi}{(1-v\cos\theta)^4} \tag{18}$$

この角分布は $\boldsymbol{k}$ と直角の方向で，偏極ベクトル $\boldsymbol{e}$ の方向に極大をもつ。次に全断面積を計算すると，まず光の偏極について平均をすると $\cos^2\varphi\to 1/2$ となり，

$$\sigma_{\mathrm{K}}\approx\sigma_{\mathrm{Thomson}}Z^5\alpha^4 2\sqrt{2}\left(\frac{m}{k}\right)^{7/2}=\sigma_{\mathrm{Thomson}}32\frac{(137)^3}{Z^2}\left(\frac{I}{k}\right)^{7/2} \tag{19}$$

もし K 電子が 2 個あれば，上の断面積を 2 倍する。また(18)の分母の $1-v\cos\theta$ は 1 で近似している。$\sigma_{\mathrm{Thomson}}$ は次節で論ずるが，その定義は

$$\sigma_{\mathrm{Thomson}}=\frac{8\pi}{3}\left(\frac{e^2}{m}\right)^2 \tag{20}$$

もしも $T\sim I$ となって低エネルギーになると，再散乱による補正が重要になり，Born 近似は妥当性を失う。ここで補正因子を証明なしに与えると，σ_K に対して乗ぜられるべき因子は

$$2\pi\sqrt{\frac{I}{k}}\frac{\exp(-4\xi\cot^{-1}\xi)}{1-e^{-2\pi\xi}},\qquad ここに\quad \xi=\frac{Ze^2}{v}=\sqrt{\frac{I}{k-I}} \tag{21}$$

相対論的計算 (2)の条件を緩和して，$m\gg T$ をとり除き

$$T\gg I \tag{22}$$

のみを仮定した場合には，非相対論的計算は妥当性を失う。したがって相対論的な Dirac 理論を用いて計算しなければならない。この計算はまた，上の非相対論的計算を特殊な場合として含んでいなければならない。

まず相互作用は，Dirac 粒子を仮定すると

$$H'=-e\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{A} \tag{23}$$

また波動関数は，**1.** 章の結果を利用すると

$$\psi_f=\frac{e^{i\boldsymbol{px}}}{\sqrt{V}}u(p)=\frac{e^{i\boldsymbol{px}}}{\sqrt{V}}\sqrt{\frac{E+m}{2E}}\begin{pmatrix}\varphi_b\\ \dfrac{\boldsymbol{\sigma p}}{E+m}\varphi_b\end{pmatrix}\qquad (E=\sqrt{m^2+\boldsymbol{p}^2}) \tag{24}$$

$$\psi_i=Cr^{\gamma-1}e^{-br}\begin{pmatrix}\varphi_a\\ i\dfrac{\boldsymbol{\sigma x}}{r}\dfrac{e^2Z}{1+\gamma}\varphi_a\end{pmatrix}\qquad [\gamma=\sqrt{1-(Ze^2)^2},\ b=mZe^2] \tag{25}$$

$$C=\sqrt{\frac{1+\gamma}{\Gamma(1+2\gamma)}}\frac{1}{\sqrt{8\pi}}(2b)^{\gamma+\frac{1}{2}} \tag{26}$$

こうすると行列要素は，

$$\begin{aligned}
H'_{fi}&=-e\sqrt{\frac{2\pi}{kV}}\int\psi_f{}^\dagger\boldsymbol{\alpha e}\psi_i e^{i\boldsymbol{kx}}d^3x\\
&=-e\sqrt{\frac{2\pi}{k}}\cdot\frac{C}{V}\sqrt{\frac{E+m}{2E}}\int d^3x\,e^{i(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p})\boldsymbol{x}}r^{\gamma-1}e^{-br}\\
&\quad\times\begin{pmatrix}\varphi_b\\ \dfrac{\boldsymbol{\sigma p}}{E+m}\varphi_b\end{pmatrix}^\dagger\boldsymbol{\alpha e}\begin{pmatrix}\varphi_a\\ i\dfrac{e^2Z}{1+\gamma}\dfrac{\boldsymbol{\sigma x}}{r}\varphi_a\end{pmatrix}\\
&=-e\sqrt{\frac{2\pi}{k}}\sqrt{\frac{E+m}{2E}}\frac{C}{V}\int d^3x\,e^{i(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p})\boldsymbol{x}}r^{\gamma-1}e^{-br}\\
&\quad\times\varphi_b{}^\dagger\left(i\frac{e^2Z}{1+\gamma}\boldsymbol{\sigma e}\cdot\boldsymbol{\sigma n}+\frac{\boldsymbol{\sigma p}\cdot\boldsymbol{\sigma e}}{E+m}\right)\varphi_a\qquad\left(\boldsymbol{n}=\frac{\boldsymbol{x}}{r}\right)
\end{aligned} \tag{27}$$

次に実際に計算する場合には，$Ze^2 \ll 1,\ \gamma \approx 1$ として次の近似を用いる。

$$C \approx \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}}, \quad \text{ただし} \quad a = \frac{1}{b} \tag{28}$$

したがって

$$H'_{fi} = -e\sqrt{\frac{2\pi}{k}}\sqrt{\frac{E+m}{2E}}\frac{1}{V}\frac{1}{\sqrt{\pi a^3}}\int d^3x\, e^{i\boldsymbol{q}\boldsymbol{x}} e^{-br}$$
$$\times \varphi_b{}^\dagger\left(i\frac{e^2Z}{2}\boldsymbol{\sigma e}\cdot\boldsymbol{\sigma n} + \frac{\boldsymbol{\sigma p}\cdot\boldsymbol{\sigma e}}{E+m}\right)\varphi_a \tag{29}$$

ここで必要になる積分は

$$I = \int d^3x\, e^{i\boldsymbol{q}\boldsymbol{x}} e^{-br} = \frac{8\pi b}{(b^2+q^2)^2}$$
$$\boldsymbol{J} = \int d^3x\, e^{i\boldsymbol{q}\boldsymbol{x}} e^{-br}\frac{\boldsymbol{x}}{r}$$

ところで $\boldsymbol{J}$ は，次のようにして I から導かれる。

$$\frac{\partial I}{\partial q_j} = \int d^3x(ix_j)e^{i\boldsymbol{q}\boldsymbol{x}}e^{-br} = -\frac{32\pi b q_j}{(b^2+q^2)^3}$$
$$\frac{\partial J_j}{\partial b} = \int d^3x(-x_j)e^{i\boldsymbol{q}\boldsymbol{x}}e^{-br} = i\frac{\partial I}{\partial q_j} = -i\frac{32\pi b q_j}{(b^2+q^2)^3}$$

さて $b=\infty$ で $\boldsymbol{J}=0$ であるから，上の式を b から ∞ まで積分すると $\boldsymbol{J}$ が出る。

$$J_j = \int_b^\infty db\, i\frac{32\pi b q_j}{(b^2+q^2)^3} = \frac{8\pi i q_j}{(b^2+q^2)^2}$$

これで必要な積分が求まった。そこでこの結果を(29)式の積分の中に代入すると次の結果が得られる。

$$\int(29) = \varphi_b{}^\dagger\left(ie^2Z\boldsymbol{\sigma e}\cdot\boldsymbol{\sigma}i\boldsymbol{q} + \frac{\boldsymbol{\sigma p}\cdot\boldsymbol{\sigma e}}{E+m}2b\right)\varphi_a\frac{4\pi}{(b^2+q^2)^2}$$
$$= \frac{8\pi b}{(b^2+q^2)^2}\varphi_b{}^\dagger\left(\frac{\boldsymbol{\sigma p}\cdot\boldsymbol{\sigma e}}{E+m} - \frac{e^2Z}{2b}\boldsymbol{\sigma e}\cdot\boldsymbol{\sigma q}\right)\varphi_a \quad (\boldsymbol{q}=\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p}) \tag{30}$$

ゆえに

$$H'_{fi} = -e\sqrt{\frac{2}{k}}\sqrt{\frac{E+m}{2E}}\cdot\frac{1}{V}\cdot\frac{1}{\sqrt{a^3}}\cdot\frac{8\pi b}{(b^2+q^2)^2}$$
$$\times \varphi_b{}^\dagger\left(\frac{\boldsymbol{\sigma p}\cdot\boldsymbol{\sigma e}}{E+m} - \frac{1}{2m}\boldsymbol{\sigma e}\cdot\boldsymbol{\sigma q}\right)\varphi_a \tag{31}$$

さて $k-I-(E-m)=k-E+m\gamma$ と書き，$\gamma\sim 1$ とすると δ の中は $k-E+m$ となるから

$$d\sigma \approx 2\pi V^2\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\delta(k-I-T)\,|H'_{fi}|^2$$

$$\approx V^2\frac{d^3p}{(2\pi)^2}\delta(k-\sqrt{p^2+m^2}+m)\,|H'_{fi}|^2$$

$$=\frac{d^3p}{(2\pi)^2}\delta(k+m-\sqrt{p^2+m^2})\frac{2e^2}{k}\cdot\frac{E+m}{2E}\cdot b^3\frac{64\pi^2b^2}{(b^2+q^2)^4}$$

$$\times\left|\varphi_b{}^\dagger\left(\frac{\boldsymbol{\sigma p}\cdot\boldsymbol{\sigma e}}{E+m}-\frac{\boldsymbol{\sigma e}\cdot\boldsymbol{\sigma q}}{2m}\right)\varphi_a\right|^2 \tag{32}$$

まず φ_b に対してはスピンの方向につき加え，φ_a に対しては平均をとるという操作をすると，2次元の trace に帰着する。

$$|\quad〃\quad|^2\longrightarrow\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(\frac{\boldsymbol{\sigma p}\cdot\boldsymbol{\sigma e}}{E+m}-\frac{\boldsymbol{\sigma e}\cdot\boldsymbol{\sigma q}}{2m}\right)\left(\frac{\boldsymbol{\sigma e}\cdot\boldsymbol{\sigma p}}{E+m}-\frac{\boldsymbol{\sigma q}\cdot\boldsymbol{\sigma e}}{2m}\right)$$

$$=\frac{p^2}{(E+m)^2}+\frac{q^2}{4m^2}-\frac{1}{2m(E+m)}\mathrm{Tr}(\boldsymbol{\sigma e}\cdot\boldsymbol{\sigma q}\cdot\boldsymbol{\sigma e}\cdot\boldsymbol{\sigma p})$$

$$=\frac{p^2}{(E+m)^2}+\frac{q^2}{4m^2}-\frac{1}{2m(E+m)}\{4(\boldsymbol{pe})(\boldsymbol{qe})-2(\boldsymbol{qp})\} \tag{33}$$

次に $\boldsymbol{e}$ について平均をとると†

$$\longrightarrow\frac{p^2}{(E+m)^2}+\frac{q^2}{4m^2}-\frac{1}{2m(E+m)}\left\{2(\boldsymbol{pq})-2\frac{(\boldsymbol{pk})(\boldsymbol{qk})}{k^2}-2(\boldsymbol{qp})\right\}$$

$$=\frac{p^2}{(E+m)^2}+\frac{q^2}{4m^2}+\frac{(\boldsymbol{pk})(\boldsymbol{qk})}{m(E+m)k^2} \tag{34}$$

非相対論的近似をしてみると，$m\gg p\gg T$, $k\ll p$ であるから(34)の式は次の形に移行する。

$$\longrightarrow\frac{1}{2m^2}\left\{p^2-\frac{(\boldsymbol{pk})^2}{k^2}\right\} \tag{35}$$

非相対論的理論で上の式に対応するのは

$$\frac{p_e{}^2}{m^2}\longrightarrow\frac{1}{2m^2}\left\{p^2-\frac{(\boldsymbol{pk})^2}{k^2}\right\} \tag{36}$$

であるから，“相対論的計算は非相対論的計算を特別な場合として含んでいる”。

$$d\sigma=\frac{d^3p}{(2\pi)^2}\delta(k+m-\sqrt{p^2+m^2})\frac{2e^2}{k}\cdot\frac{E+m}{2E}\cdot\frac{64\pi^2b^5}{(b^2+q^2)^4}$$

$$\times\left\{\frac{p^2}{(E+m)^2}+\frac{q^2}{4m^2}+\frac{(\boldsymbol{pk})(\boldsymbol{qk})}{m(E+m)\cdot k^2}\right\} \tag{37}$$

この式を積分するのに

$$\int\frac{d^3p}{(2\pi)^2}\delta(k+m-\sqrt{p^2+m^2})\cdots=\int\frac{p^2dp\,d\Omega}{(2\pi)^2}\delta(k+m-\sqrt{p^2+m^2})\cdots$$

---

† この計算は次節でも用いられるが，$\boldsymbol{k}$ の方向を z 方向に選び，$(\boldsymbol{pe})(\boldsymbol{qe})$ をそれと直交する二つの偏極方向につき加えると $p_xq_x+p_yq_y=\boldsymbol{pq}-p_zq_z$ となる。この z 成分を $\boldsymbol{k}$ とのスカラー積で表わせばよい。

$$=p\sqrt{p^2+m^2}\int\frac{d\Omega}{(2\pi)^2}\cdots$$

ゆえに

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=p\sqrt{p^2+m^2}\cdot\frac{2e}{k}\cdot\frac{E+m}{2E}\cdot\frac{16b^5}{(b^2+q^2)^4}$$
$$\times\left\{\frac{p^2}{(E+m)^2}+\frac{q^2}{4m^2}+\frac{(\boldsymbol{pk})(\boldsymbol{qk})}{m(E+m)\cdot k^2}\right\}\tag{38}$$

次に $m\gamma=k+m=\sqrt{p^2+m^2}$ という変数 γ を用いて上の式を書き直してみよう†。

$$k=m(\gamma-1)$$
$$p=m\sqrt{\gamma^2-1}$$
$$q^2=k^2+p^2-2kp\cos\theta$$
$$=2m^2(\gamma-1)(\gamma-\sqrt{\gamma^2-1}\cos\theta)$$

$\gamma\gg 1$ ならば $b^2+q^2\approx q^2$ であるから，$b^2=mZe^2$ を使って b を消去すると

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=r_0{}^2Z^5\alpha^4\left(\frac{m}{k}\right)^{7/2}(\gamma+1)^{3/2}$$
$$\times\left\{\frac{1}{\gamma+1}+\frac{\gamma}{2}+\sqrt{\gamma^2-1}\left(\frac{1}{\gamma+1}-\frac{1}{2}\right)\cos\theta-\cos^2\theta\right\}$$
$$\times\frac{1}{(\gamma-\sqrt{\gamma^2-1}\cos\theta)^4}\qquad\left(r_0=\frac{e^2}{m}\right)\tag{39}$$ ††

この式が 1s 電子に対する光電効果の断面積を与える。$\gamma\to 1$ とすると非相対論的公式と一致する。

3-4 Thomson 散乱

前節では光の吸収について考えたが，今度は散乱について考える。散乱過程の一つの特徴は，この問題を古典論で取り扱うことができることであって，しかも低いエネルギーでは量子論の結果と一致することである。

まずこの節では，この問題を Coulomb ゲージで古典的に解いてみよう。

$$\Box\boldsymbol{A}=-4\pi\boldsymbol{j}+\mathrm{grad}\,\dot{\varphi}\tag{1}$$
$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}=0\tag{2}$$

---

† この γ は変数で，$\sqrt{1-(Ze^2)^2}$ とは異なる。ここでは後者は出ないから混同のおそれはないであろう。

†† $m/k=1/(\gamma-1)$ と書いた方がよいかもしれない。また $r_0=e^2/m$ は次節で議論される。

方程式(1)の解は，次のように分解される。

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_{\rm in}+\boldsymbol{A}'+\boldsymbol{A}'' \tag{3}$$

ただし，$\boldsymbol{A}_{\rm in}$ は入射波を表わし，$\boldsymbol{A}'$ と $\boldsymbol{A}''$ は次の方程式の遅延解である。

$$\square \boldsymbol{A}'=-4\pi \boldsymbol{j} \tag{4}$$

$$\square \boldsymbol{A}''=\mathrm{grad}\,\dot{\varphi} \tag{5}$$

これらの方程式を解くためには，右辺がわかっていなければならない。

$\boldsymbol{A}'$ の積分　まず方程式(4)を解くと，2-1 で証明されたように

$$\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{x})=\int d^3x' \frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}',\, t-r)}{r}, \qquad r=|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'| \tag{6}$$

ところで，座標が時間 t の関数として $\boldsymbol{x}_e(t)$ で表わされる運動をする電子によって作られる電流密度は，次式で与えられる。

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x},\, t)=e\dot{\boldsymbol{x}}_e(t)\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_e(t)) \tag{7}$$

したがって $\boldsymbol{j}$ を決めるためには，電子の運動方程式を解かなければならない。それは次の方程式で与えられる。

$$m\ddot{\boldsymbol{x}}_e=e(\boldsymbol{E}+\dot{\boldsymbol{x}}_e\times\boldsymbol{H}) \tag{8}$$

ただし，$\boldsymbol{E}$ も $\boldsymbol{H}$ も電子の位置における値を用いるものとする。さて初期条件として電子はもともと $\boldsymbol{x}_e=0$ にいたのが電磁場により原点の付近を振動すると考えられる。ところで入射平面波に対しては $|\boldsymbol{E}|\sim|\boldsymbol{H}|$ であり，$|\dot{\boldsymbol{x}}_e|\ll 1$ とすれば，方程式(8)の第二項を省略してもよいであろう。したがって近似的な方程式は

$$m\ddot{\boldsymbol{x}}_e=e\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}_e,\, t) \tag{9}$$

さて $e\to 0$ とすれば，$\boldsymbol{x}_e\to 0$ であるから $\boldsymbol{x}_e=O(e)$ と考えられ，

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}_e,\, t)=\boldsymbol{E}(0,\, t)+O(e) \tag{10}$$

同様に，$\boldsymbol{A}$ も $\boldsymbol{A}_{\rm in}$ で近似すれば

$$m\ddot{\boldsymbol{x}}_e\approx -e\dot{\boldsymbol{A}}_{\rm in}(0,\, t) \tag{11}$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}_e\approx -\frac{e}{m}\boldsymbol{A}_{\rm in}(0,\, t) \tag{12}$$

のように積分できる。同様な理由で(7)の δ 関数の中で $\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}_e(t)$ を $\boldsymbol{x}$ で近似して

$$\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{x},\, t)\approx\int d^3x'\left(-\frac{e^2}{m}\right)\frac{\boldsymbol{A}_{\rm in}(0,\, t-r)\delta(\boldsymbol{x}')}{r} \qquad (r=|\boldsymbol{x}|)$$

$$=-\left(\frac{e^2}{m}\right)\frac{1}{r}\boldsymbol{A}_{\rm in}(0,\, t-r) \tag{13}$$

さて今後 $\boldsymbol{A}_{\rm in}$ の形として次の形をとることにしよう。

$$\boldsymbol{A}_{\rm in}(\boldsymbol{x},\, t)=\boldsymbol{e}_i e^{i(\boldsymbol{k}_i\boldsymbol{x}-k_i t)}, \qquad \text{ただし}\quad \boldsymbol{e}_i\boldsymbol{k}_i=0,\ |\boldsymbol{e}_i|=1 \tag{14}$$

そうすると(13)から

$$\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{x},\ t)=\frac{e^{ikr}}{r}\left(-\frac{e^2}{m}\right)\boldsymbol{e}_i e^{-ik_i t} \tag{15}$$

A'' の積分 次に $\boldsymbol{A}''$ を求めよう。それには次の方程式を解かなければならない。

$$\Box \boldsymbol{A}''=\mathrm{grad}\,\dot{\varphi} \tag{5}$$

$$\Delta\varphi=-4\pi\rho \tag{16}$$

$$\rho(\boldsymbol{x},\ t)=e\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_{\mathrm{e}}(t)) \tag{17}$$

(5)と(16)とを組み合わせて

$$\Box(\Delta\boldsymbol{A}'')=-4\pi\,\mathrm{grad}\,\dot{\rho} \tag{18}$$

この方程式の遅延解は

$$\Delta\boldsymbol{A}''(\boldsymbol{x},\ t)=\int d^3x'\frac{\mathrm{grad}\,\dot{\rho}(\boldsymbol{x}',\ t-r)}{r} \tag{19}$$

さて(17)より

$$\begin{aligned}\dot{\rho}(\boldsymbol{x},\ t)&=e\dot{\boldsymbol{x}}_e(t)\,\mathrm{grad}_e\,\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_e(t))\\&\approx -e\dot{\boldsymbol{x}}_e(t)\,\mathrm{grad}\,\delta^3(\boldsymbol{x})\end{aligned} \tag{20}$$

$$(\mathrm{grad}\,\dot{\rho}(\boldsymbol{x},\ t))_r\approx -e\dot{x}_{es}\frac{\partial^2}{\partial x_r\partial x_s}\delta^3(\boldsymbol{x}) \tag{21}$$

この結果を(19)に代入すると，

$$\begin{aligned}\Delta A_r''(\boldsymbol{x},\ t)&=-e\frac{\partial^2}{\partial x_r\partial x_s}\left\{\dot{x}_{es}(t-r)\frac{1}{r}\right\}\\&=\frac{1}{r}\left(\frac{e^2}{m}\right)\frac{\partial^2}{\partial x_r\partial x_s}A_{\mathrm{in},s}(0,\ t-r)+O\left(\frac{1}{r^2}\right)\end{aligned} \tag{22}$$

いま(14)の $\boldsymbol{A}_{\mathrm{in}}$ を代入し，微分を実行すると

$$\Delta A_r''(\boldsymbol{x},\ t)=\left(ik_i\frac{x_r}{r}\right)\left(ik_i\frac{x_s}{r}\right)\frac{1}{r}\left(\frac{e^2}{m}\right)e_{is}e^{ik_i(r-t)}+O\left(\frac{1}{r^2}\right) \tag{23}$$

ここで $k_i\boldsymbol{x}/r\equiv\boldsymbol{k}_f$ とおくと

$$\Delta A_r''(\boldsymbol{x},\ t)=-\frac{e^{ik_i(r-t)}}{r}\left(\frac{e^2}{m}\right)(\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{k}_f)(k_f)_r+O\left(\frac{1}{r^2}\right) \tag{24}$$

この方程式を r の大きい所だけで正しく解くと

$$\boldsymbol{A}''(\boldsymbol{x},\ t)=\frac{e^{ik_i(r-t)}}{r}\left(\frac{e^2}{m}\right)\frac{(\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{k}_f)}{k^2}\boldsymbol{k}_f+O\left(\frac{1}{r^2}\right) \tag{25}$$

これから $\boldsymbol{A}$ に対する解の r が大きい所での漸近形が求まる。(15)と(25)とを一緒にして漸近形を作ると，

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},\ t)\sim\boldsymbol{e}_i e^{i(\boldsymbol{k}_i\boldsymbol{x}-k_i t)}+\frac{e^{ik_i(r-t)}}{r}\left(-\frac{e^2}{m}\right)\left\{\boldsymbol{e}_i-\frac{(\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{k}_f)}{k^2}\boldsymbol{k}_f\right\}\quad(r\to\infty) \tag{26}$$

ただし $\boldsymbol{k}_i^2=\boldsymbol{k}_f^2=k^2$ とおいてある。e^{-ik_it} は全体に共通な位相因子であるから落としてもよい。そうすると(26)の漸近形は散乱理論の標準形になっているので断面積は直ちに形式的に次式で与えられる†。

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\left(\frac{e^2}{m}\right)^2\left\{\boldsymbol{e}_i-\frac{(\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{k}_f)}{k^2}\boldsymbol{k}_f\right\}^2$$

$$=r_0^2\left\{1-\frac{(\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{k}_f)^2}{k^2}\right\} \tag{27}$$

ここに $r_0=e^2/m$ は**古典電子半径**(classical electron radius)とよばれ

$$r_0=2.818\times10^{-13}\,\mathrm{cm} \tag{28}$$

上の断面積は入射光の偏極に依存するので二つの可能な偏極方向について平均をとると

$$\frac{(\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{k}_f)^2}{k^2}\longrightarrow\frac{1}{2}\sum_{\boldsymbol{e}_i}\frac{(\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{k}_f)^2}{k^2}=\frac{1}{2}\left\{1-\frac{(\boldsymbol{k}_i\boldsymbol{k}_f)^2}{k^2}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\sin^2\theta \qquad (\theta:\ \text{散乱角}) \tag{29}$$

この結果を(27)に代入すると

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=r_0^2\frac{1+\cos^2\theta}{2} \tag{30}$$

この結果は J. J. Thomson によって求められた。これから全散乱断面積は

$$\sigma_{\mathrm{Thomson}}=r_0^2\int d\Omega\frac{1+\cos^2\theta}{2}$$

$$=\frac{8\pi}{3}r_0^2 \tag{31}$$

この断面積の数値は，$6.65\times10^{-25}\,\mathrm{cm}^2$ で与えられる。

上の計算法から明らかなように以上では低いエネルギーの電子にしか成り立たない近似を用いたが，この結果は $k\to0$ の極限では量子論でも正しい結果である。そこでこれを **Thomson 極限**とよぶ。どんな近似で計算しても Thomson 極限が正しく出せるかどうかは，一つのチェックになる。また Thomson 極限は量子論でも，標的の粒子のスピンの値に関係せず成り立つ。一般に低エネルギーで高次補正まで考慮して厳密に成り立つ結果を**低エネルギー定理**とよぶ。

† 古典電磁場は量子化されていないので粒子概念と結びついていない。そこでどうやって断面積を定義するかが問題となる。これについての詳しい議論については 1-13 参照のこと。

3-5 非相対論的近似における光子の散乱

前節において古典的な方法で光の散乱を計算したが，今度は量子論を用いて光子の散乱という粒子の散乱現象を取り扱う。

Schrödinger 近似での電磁的相互作用は

$$H'=-\frac{e}{m}\boldsymbol{pA}-\frac{e}{2m}\boldsymbol{\sigma H}+\frac{e^2}{2m}\boldsymbol{A}^2\equiv H^{(1)}+H^{(2)} \tag{1}$$

ただし $H^{(1)}$ は e について1次の項，$H^{(2)}$ は e について2次の項である。さて最低次 e^2 での遷移振幅は摂動論の公式により

$$T_{fi}=H^{(2)}_{fi}+\sum_n\frac{H^{(1)}_{fn}H^{(1)}_{ni}}{E_i-E_n} \tag{2}$$

この問題では外場がないから系の運動量は中間状態でも保存する。そして2次では二つの可能な中間状態が存在する。

$$\underset{\text{光子}}{(\boldsymbol{k}_i,\ \boldsymbol{e}_i)}+\underset{\text{電子}}{\boldsymbol{p}_i}\ \begin{cases}\boldsymbol{p}_i+\boldsymbol{k}_i, & \text{中間状態}\ a\\ \boldsymbol{p}_i-\boldsymbol{k}_f+(\boldsymbol{k}_i,\ \boldsymbol{e}_i)+(\boldsymbol{k}_f,\ \boldsymbol{e}_f), & \text{中間状態}\ b\end{cases}\ \rightarrow \boldsymbol{p}_f+(\boldsymbol{k}_f,\ \boldsymbol{e}_f) \tag{3}$$

したがって

$$T_{fi}=\frac{e^2}{2m}(\boldsymbol{A}^2)_{fi}+\left(\frac{e}{m}\right)^2\sum_n\frac{\left(\boldsymbol{pA}+\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma H}\right)_{fn}\left(\boldsymbol{pA}+\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma H}\right)_{ni}}{E_i-E_n} \tag{4}$$

いまここに出てきた行列要素を具体的に書くと，第一の中間状態 a に対しては

$$\left(\boldsymbol{pA}+\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma H}\right)_{fa}=\sqrt{\frac{4\pi}{V}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2k_f}}\left\{(\boldsymbol{p}_f+\boldsymbol{k}_f)\boldsymbol{e}_f-\frac{i}{2}\boldsymbol{\sigma}_{fa}\cdot\boldsymbol{k}_f\times\boldsymbol{e}_f\right\} \tag{5}$$

$$\left(\boldsymbol{pA}+\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma H}\right)_{ai}=\sqrt{\frac{4\pi}{V}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2k_i}}\left\{(\boldsymbol{p}_i+\boldsymbol{k}_i)\boldsymbol{e}_i+\frac{i}{2}\boldsymbol{\sigma}_{ai}\cdot\boldsymbol{k}_i\times\boldsymbol{e}_i\right\} \tag{6}$$

$$E_i-E_a=\frac{\boldsymbol{p}_i^2}{2m}+k_i-\frac{(\boldsymbol{p}_i+\boldsymbol{k}_i)^2}{2m} \tag{7}$$

第二の中間状態 b に対しては

$$\left(\boldsymbol{pA}+\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma H}\right)_{fb}=\sqrt{\frac{4\pi}{V}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2k_i}}\left(\boldsymbol{p}_f\boldsymbol{e}_i+\frac{i}{2}\boldsymbol{\sigma}_{fb}\cdot\boldsymbol{k}_i\times\boldsymbol{e}_i\right) \tag{8}$$

$$\left(\boldsymbol{pA}+\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma H}\right)_{bi}=\sqrt{\frac{4\pi}{V}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2k_f}}\left(\boldsymbol{p}_i\boldsymbol{e}_f-\frac{i}{2}\boldsymbol{\sigma}_{bi}\cdot\boldsymbol{k}_f\times\boldsymbol{e}_f\right) \tag{9}$$

$$E_i-E_b=\frac{\boldsymbol{p}_i^2}{2m}-\frac{(\boldsymbol{p}_i-\boldsymbol{k}_f)^2}{2m}-k_f \tag{10}$$

そして(4)の第一項は $\boldsymbol{A}^2$ の中の2個の $\boldsymbol{A}$ のいずれが $\boldsymbol{k}_f$ を創り，いずれが $\boldsymbol{k}_i$ を消すかの選び方が2通りあるから

$$\frac{e^2}{2m}(\boldsymbol{A}^2)_{fi}=\frac{e^2}{m}\cdot\frac{4\pi}{V}\cdot(\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_f)\cdot\frac{1}{\sqrt{4k_ik_f}} \tag{11}$$

これらの式を(4)に代入すればよい。ところで $m\gg k$ の近似をすると，(4)の第一項が大きくなるので，第二項を省略してしまおう。次節で相対論的なもっと精密な計算をするので，ここではきわめて低いエネルギー領域のみを考える。そうするとこの近似では

$$T_{fi}\approx\frac{e^2}{m}\cdot\frac{2\pi}{kV}\cdot(\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_f) \tag{12}$$

これから断面積を出すと

$$\begin{aligned}\sigma&=2\pi V\sum_f|T_{fi}|^2\delta(E_i-E_f)\\&=\left(\frac{e^2}{m}\right)^2(2\pi)^3\frac{1}{Vk^2}\sum_f(\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_f)^2\delta(E_i-E_f)\end{aligned} \tag{13}$$

ただしこの近似では $\delta(E_i-E_f)$ は $\delta(k_i-k_f)$ でおきかえ，$k_i=k_f=k$ と書いている。そこで

$$\sum_f\longrightarrow V\int\frac{d^3k_f}{(2\pi)^3}$$

のおきかえをすると

$$\sigma=r_0{}^2\int(\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_f)^2d\Omega \tag{14}$$

あるいは

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=r_0{}^2(\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_f)^2 \tag{15}$$

古典論の場合と同様に，$\boldsymbol{e}_i$ につき平均し，$\boldsymbol{e}_f$ につき和をとると

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_f)^2\longrightarrow\frac{1}{2}\sum_{\boldsymbol{e}_i}\sum_{\boldsymbol{e}_f}(\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_f)^2&=\frac{1}{2}\sum_{\boldsymbol{e}_i}\left\{\boldsymbol{e}_i{}^2-\frac{(\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{k}_f)^2}{k^2}\right\}\\&=\frac{1+\cos^2\theta}{2}\end{aligned} \tag{16}$$

したがって

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=r_0{}^2\frac{1+\cos^2\theta}{2} \tag{17}$$

この結果は古典論における **Thomson の公式**と一致する。このように電磁的相互作用については，低エネルギーでは古典論と量子論とが同じ結果を与えることが多い。たとえば Coulomb 場による荷電粒子の散乱に対する Rutherford の公式，上に述べた自由な荷電粒子による光の散乱に対する Thomson の公式，また演習問題にあるが，荷電調和振動子による光の散乱等では古典論の結果がそのまま量子論の結果になっている。歴史的に考

えれば，古典論によりいろいろな正しい結果が得られ，原子構造の解明に役だったという意味で興味のある事実である。

3-6 Klein-Nishina の公式

前節では $m \gg k$ と仮定して Thomson の公式を出したが，k が必ずしも小さくない場合の計算をするためには完全に相対論的な Dirac 理論を用いなければならない。この場合には実験室系での計算が便利である†。今後この系で，初期状態に関する量に添字 0 をつけ，終状態に関する量には添字をつけないことにする。そこで

$$\boldsymbol{p}_0=0, \qquad E_0=m \tag{1}$$

また $(\boldsymbol{k}_0, \boldsymbol{e}_0)$ の光子が散乱され，角 θ だけ(実験室系で)散乱されるものとする。そうするとエネルギー・運動量の保存則より

$$\boldsymbol{p}=\boldsymbol{k}_0-\boldsymbol{k}, \qquad E+k=m+k_0 \tag{2}$$

また

$$E=\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2}=\sqrt{(\boldsymbol{k}_0-\boldsymbol{k})^2+m^2}=\sqrt{k_0{}^2+k^2-2kk_0\cos\theta+m^2} \tag{3}$$

他方(2)より，$E=m+k_0-k$ であるから，この式と(3)から E を消去すると

$$k=\frac{k_0 m}{m+k_0(1-\cos\theta)}<k_0 \tag{4}$$

これはいわゆる **Compton の公式**である。これは散乱後の振動数の減少を表わす。

さてこの場合の相互作用は，Coulomb ゲージで

$$H'=-e\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{A} \tag{5}$$

となり，今度は e^2 の項がない。2 次の摂動論で T_{fi} を計算すると

$$T_{fi}=\sum_n \frac{H'_{fn}H'_{ni}}{E_i-E_n} \tag{6}$$

今度も非相対論的な場合と同様に，二つの中間状態があるので前節の(3)に対応して，これらの状態を a, b とよぶことにする。そうすると

$$T_{fi}=\frac{H'_{fa}H'_{ai}}{E_i-E_a}+\frac{H'_{fb}H'_{bi}}{E_i-E_b} \tag{7}$$

この行列要素を計算するのに**一電子理論**を用いる。すなわち，**空孔理論**は使わない。その理由の一つは後者は多体問題となり計算が複雑であること

† 前節の計算では，実験室系と重心系との違いがない。

であり，もう一つの理由は，最低次の摂動計算では両者は同じ結果を与えるからである。このことについては 1-16 で詳しく議論したが，ここでもう一度もっと詳しい定理を述べておく。

定理　ある過程の T 行列要素を摂動論で計算する場合に，もしも中間状態に現われるすべての粒子の運動量が運動量保存則† の結果として初期状態および終状態に現われる粒子の運動量で表わせるならば††，一電子理論と空孔理論とは同一の結果を与える。

この定理の証明には場の量子論が必要となるので省略する。さて上に述べた中間状態 a, b では定理の条件を満たしているから，**Compton** 散乱の最低次の計算は明らかに上の定理の適用例である。そこで安心して一電子理論が使える。

(7)に出てくる行列要素を具体的に書いてみよう†††。

$$H'_{ai}=-eu^{\dagger}(\boldsymbol{k}_0)\boldsymbol{\alpha}u(0)\sqrt{\frac{4\pi}{V}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2k_0}}\boldsymbol{e}_0 \tag{8}$$

$$H'_{fa}=-eu^{\dagger}(\boldsymbol{p})\boldsymbol{\alpha}u(\boldsymbol{k}_0)\sqrt{\frac{4\pi}{V}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2k}}\boldsymbol{e} \tag{9}$$

$$H'_{bi}=-eu^{\dagger}(-\boldsymbol{k})\boldsymbol{\alpha}u(0)\sqrt{\frac{4\pi}{V}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2k}}\boldsymbol{e} \tag{10}$$

$$H'_{fb}=-eu^{\dagger}(\boldsymbol{p})\boldsymbol{\alpha}u(-\boldsymbol{k})\sqrt{\frac{4\pi}{V}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2k_0}}\boldsymbol{e}_0 \tag{11}$$

さて中間状態の電子は運動量のみが指定されているから，エネルギーには正負 2 種類の可能な値がある。すなわち与えられた $\boldsymbol{p}$ に対して

$$\pm\sqrt{m^2+\boldsymbol{p}^2}$$

したがってエネルギー分母に出てくるエネルギーの可能な値は

$$E_i=k_0+m,\quad E_a=\pm\sqrt{m^2+k_0{}^2},\qquad E_b=k_0+k\pm\sqrt{m^2+k^2} \tag{12}$$

このように負エネルギー状態が許されるのは，一電子理論を採用しているからである。そこで中間状態を電子のエネルギーの符号に従ってさらに細分する。

$$a(+),\ a(-),\ b(+),\ b(-)$$

そして次の式を考える。この式は(7)に(8)から(11)までを代入して得られる。

---

† 中間状態でも運動量は保存するが，エネルギーは不確定性原理の結果として必ずしも保存しない。

†† 一番簡単な例外例は自己エネルギーである。

††† 中間状態 a での電子の運動量は $\boldsymbol{k}_0$, b では $-\boldsymbol{k}$ であることに注意せよ。

$$T_{fi}=\frac{e^2}{2\sqrt{kk_0}}\cdot\frac{4\pi}{V}\left\{\sum_a\frac{u^\dagger(\boldsymbol{p})\boldsymbol{ae}u(\boldsymbol{k}_0)\cdot u^\dagger(\boldsymbol{k}_0)\boldsymbol{ae}_0u(0)}{E_i-E_a}\right.$$
$$\left.+\sum_b\frac{u^\dagger(\boldsymbol{p})\boldsymbol{ae}_0u(-\boldsymbol{k})\cdot u^\dagger(-\boldsymbol{k})\boldsymbol{ae}u(0)}{E_i-E_b}\right\} \tag{13}$$

ここに $\sum_a$ は a における電子のエネルギーの符号およびスピンの方向に関する和をとることを意味する。そこで a を $a(+)$, $a(-)$ に, b を $b(+)$, $b(-)$ に分けて，それぞれについてスピン方向に和をとってみよう。それには Casimir の方法で，正エネルギー状態および負エネルギー状態に対する射影演算子を用いればよい。そこで上の式の括弧の中を細分してスピン和の結果のみを書くと

$$\sum_{a(+)}=\frac{u^\dagger(\boldsymbol{p})\alpha(\boldsymbol{ak}_0+\beta m+\sqrt{m^2+k_0{}^2})\alpha_0u(0)}{2\sqrt{m^2+k_0{}^2}\,(k_0+m-\sqrt{m^2+k_0{}^2}\,)}$$
$$\sum_{a(-)}=\frac{u^\dagger(\boldsymbol{p})\alpha(-\boldsymbol{ak}_0-\beta m+\sqrt{m^2+k_0{}^2}\,)\alpha_0u(0)}{2\sqrt{m^2+k_0{}^2}\,(k_0+m+\sqrt{m^2+k_0{}^2}\,)}$$
$$\sum_{b(+)}=\frac{u^\dagger(\boldsymbol{p})\alpha_0(-\boldsymbol{ak}+\beta m+\sqrt{m^2+k^2}\,)\alpha u(0)}{2\sqrt{m^2+k^2}\,(m-k-\sqrt{m^2+k^2}\,)}$$
$$\sum_{b(-)}=\frac{u^\dagger(\boldsymbol{p})\alpha_0(\boldsymbol{ak}-\beta m+\sqrt{m^2+k^2}\,)\alpha u(0)}{2\sqrt{m^2+k^2}\,(m-k+\sqrt{m^2+k^2}\,)}$$

ただし簡単のために $\alpha=\boldsymbol{ae}$, $\alpha_0=\boldsymbol{ae}_0$ という記号を用いている。次に $a(+)$ と $a(-)$, $b(+)$ と $b(-)$ とを加える。

$$\sum_a=\sum_{a(+)}+\sum_{a(-)}=\frac{u^\dagger(\boldsymbol{p})\alpha(k_0+m+\boldsymbol{ak}_0+\beta m)\alpha_0u(0)}{2k_0m} \tag{14}$$
$$\sum_b=\sum_{b(+)}+\sum_{b(-)}=\frac{u^\dagger(\boldsymbol{p})\alpha_0(m-k-\boldsymbol{ak}+\beta m)\alpha u(0)}{-2km} \tag{15}$$

ゆえに T_{fi} は次の形に書かれる。

$$T_{fi}=\frac{\pi}{V}\cdot\frac{e^2}{\sqrt{kk_0}}\cdot\frac{1}{m}\left\{\frac{1}{k_0}u^\dagger(\boldsymbol{p})\alpha(k_0+m+\boldsymbol{ak}_0+\beta m)\alpha_0u(0)\right.$$
$$\left.-\frac{1}{k}u^\dagger(\boldsymbol{p})\alpha_0(m-k-\boldsymbol{ak}+\beta m)\alpha u(0)\right\} \tag{16}$$

ところで Dirac 方程式より

$$(1+\beta)\alpha u(0)=\alpha(1-\beta)u(0)=0 \tag{17}$$

であるから T_{fi} は少し簡単になって

$$T_{fi}=\frac{\pi}{V}\cdot\frac{e^2}{m}\cdot\frac{1}{\sqrt{kk_0}}\left\{\frac{1}{k_0}u^\dagger(\boldsymbol{p})\alpha(k_0+\boldsymbol{ak}_0)\alpha_0u(0)\right.$$
$$\left.+\frac{1}{k}u^\dagger(\boldsymbol{p})\alpha_0(k+\boldsymbol{ak})\alpha u(0)\right\} \tag{18}$$

さて $\alpha\alpha_0+\alpha_0\alpha=2\boldsymbol{e}_0\boldsymbol{e}$ であるから

$$T_{fi}=\frac{\pi}{V}\cdot\frac{e^2}{m}\left\{u^\dagger(\boldsymbol{p})\left(2\boldsymbol{e}_0\boldsymbol{e}+\alpha\cdot\boldsymbol{\alpha}\frac{\boldsymbol{k}_0}{k_0}\cdot\alpha_0+\alpha_0\cdot\boldsymbol{\alpha}\frac{\boldsymbol{k}}{k}\cdot\alpha\right)u(0)\right\} \tag{19}$$

またスピンについて和と平均の操作をすると次に計算すべきものは

$$\frac{1}{2}\sum_{s_i}\sum_{s_f}|T_{fi}|^2 \tag{20}$$

ここで非相対論的近似をすると，(19)で $1/\sqrt{kk_0}\rightarrow 1/k$, $\boldsymbol{\alpha}\rightarrow 0$ とすればよいから

$$T_{fi}\longrightarrow\frac{2\pi}{kV}\frac{e^2}{m}(\boldsymbol{e}_0\boldsymbol{e})=(T_{fi})_{\mathrm{NR}} \tag{21}$$

となり，非相対論的計算と一致する。すなわち **Thomson 極限**が実現される。

断面積の計算　次に(20)は，Casimir の演算子を用いて計算される。

$$\frac{1}{2}\sum_{s_i}\sum_{s_f}|T_{fi}|^2=\left(\frac{\pi}{V}\right)^2\left(\frac{e^2}{m}\right)^2\frac{1}{kk_0}$$
$$\times\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left\{\frac{\boldsymbol{\alpha p}+\beta m+\sqrt{p^2+m^2}}{2\sqrt{p^2+m^2}}\left(2\boldsymbol{e}_0\boldsymbol{e}+\alpha\cdot\frac{\boldsymbol{\alpha k}_0}{k_0}\cdot\alpha_0+\alpha_0\cdot\frac{\boldsymbol{\alpha k}}{k}\cdot\alpha\right)\right.$$
$$\left.\times\frac{1+\beta}{2}\left(2\boldsymbol{e}_0\boldsymbol{e}+\alpha_0\cdot\frac{\boldsymbol{\alpha k}_0}{k_0}\cdot\alpha+\alpha\cdot\frac{\boldsymbol{\alpha k}}{k}\cdot\alpha_0\right)\right\} \tag{22}$$

この式を計算するために，$\sqrt{p^2+m^2}=k_0-k+m$, $\boldsymbol{k}_0=\boldsymbol{p}+\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{ke}=\boldsymbol{k}_0\boldsymbol{e}_0=0$ を用いる。この計算は初等的だが，面倒なので結果だけを与える。

$$\frac{1}{2}\sum_{s_i}\sum_{s_f}|T_{fi}|^2=\frac{m}{\sqrt{p^2+m^2}}\left\{4(\boldsymbol{e}_0\boldsymbol{e})^2+\frac{(k_0-k)^2}{k_0k}\right\} \tag{23}$$

ただし $k_0k-\boldsymbol{k}_0\boldsymbol{k}=k_0k(1-\cos\theta)=m(k_0-k)$ を用いている。そこで $\boldsymbol{e}_0$ と $\boldsymbol{e}$ とのなす角を Θ とすると

$$\frac{1}{2}\sum_{s_i}\sum_{s_f}|T_{fi}|^2=\left(\frac{\pi}{V}\right)^2\left(\frac{e^2}{m}\right)^2\frac{1}{kk_0}\frac{m}{\sqrt{p^2+m^2}}$$
$$\times\left\{\frac{k_0}{k}+\frac{k}{k_0}-2+4\cos^2\Theta\right\} \tag{24}$$

次に断面積を求めると

$$\sigma=2\pi V\sum_f|T_{fi}|^2\delta(E_i-E_f) \tag{25}$$

ただし $|T_{fi}|^2$ は(20)の意味で書かれている。また $\sum_f$ はこの場合

$$\sum_f\longrightarrow V\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}$$

というおきかえをする。E_i-E_f を具体的に書くと

$$E_i-E_f=k_0+m-k-\sqrt{p^2+m^2}=k_0+m-k-\sqrt{(\boldsymbol{k}_0-\boldsymbol{k})^2+m^2}$$

ゆえに

$$\sigma=\frac{1}{4}r_0^2\int\frac{d^3k}{kk_0}\frac{1}{\sqrt{p^2+m^2}}\left\{\frac{k_0}{k}+\frac{k}{k_0}-2+4\cos^2\Theta\right\}\delta(E_i-E_f)$$
$$=\frac{1}{4}r_0^2\int\frac{d^3k}{kk_0}\frac{m}{\sqrt{(\boldsymbol{k}_0-\boldsymbol{k})^2+m^2}}\left\{\frac{k_0}{k}+\frac{k}{k_0}-2+4\cos^2\Theta\right\}$$
$$\times\delta(k_0+m-k-\sqrt{k_0^2+k^2-2kk_0\cos\theta+m^2}) \tag{26}$$

そこで $d^3k=k^2dk\,d\Omega$ とすると，まず k に関する積分は

$$\int dk\,\delta(k_0+m-k-\sqrt{\ \ /\!/\ \ })\cdots=\frac{1}{1+\dfrac{k-k_0\cos\theta}{\sqrt{\ \ /\!/\ \ }}}\cdots$$
$$=\frac{\sqrt{\ \ /\!/\ \ }}{k_0(1-\cos\theta)+m}\cdots$$
$$=\sqrt{\ \ /\!/\ \ }\,\frac{k}{k_0m}\cdots$$

この結果を(26)に代入すると，微分断面積に関する **Klein-Nishina**（**仁科**）**の公式**が得られる。

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{1}{4}r_0^2\frac{k^2}{k_0^2}\left\{\frac{k_0}{k}+\frac{k}{k_0}-2+4\cos^2\Theta\right\} \tag{27}$$

さて光子の偏極につき，和と平均の操作をすると

$$\cos^2\Theta=(\boldsymbol{e}\boldsymbol{e}_0)^2\longrightarrow\frac{1+\cos^2\theta}{2} \tag{28}$$

これを(27)に代入すると

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{1}{2}r_0^2\frac{k^2}{k_0^2}\left\{\frac{k_0}{k}+\frac{k}{k_0}-\sin^2\theta\right\} \tag{29}$$

次に $\gamma=k_0/m$ と θ とを独立変数として(29)を書き直すと

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=r_0^2\frac{1+\cos^2\theta}{2}\frac{1}{\{1+\gamma(1-\cos\theta)\}^2}$$
$$\times\left[1+\frac{\gamma^2(1-\cos\theta)^2}{(1+\cos^2\theta)\{1+\gamma(1-\cos\theta)\}}\right] \tag{30}$$

また全断面積は

$$\sigma=\sigma_{\text{Thomson}}\times\frac{3}{4}\left[\frac{1+\gamma}{\gamma^3}\left\{\frac{2\gamma(1+\gamma)}{1+2\gamma}-\log(1+2\gamma)\right\}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2\gamma}\log(1+2\gamma)-\frac{1+3\gamma}{(1+2\gamma)^2}\right] \tag{31}$$

この式のおよその性格を知るために，いろいろな場合の近似式を導入すると $\gamma\ll1$ の非相対論的領域では

$$\sigma=\sigma_{\text{Thomson}}\left(1-2\gamma+\frac{26}{5}\gamma^2+\cdots\right) \tag{32}$$

また逆に $\gamma \gg 1$ のきわめて相対論的な領域では

$$\sigma = \sigma_{\mathrm{Thomson}} \times \frac{3}{8\gamma}\left(\log\frac{2}{\gamma} + \frac{1}{2}\right) \tag{33}$$

これらの式，いわゆる Klein–Nishina の公式は実験と比較してその一致はきわめてよい。このことは Dirac 理論に対する非常に強い定量的支持を与える。

このように Dirac 理論の検証は電磁場の量子論と組み合わせてはじめてできることになる。さてこの章では，光子の放出・吸収・散乱等について調べてきた。このほかに重要な電磁的過程がいろいろあるが，とても全部調べることはできないので，ここでは最も基本的な過程に限定して議論した。ここでは特に古典論とのつながりに重点をおいた。このように古典論の結果と量子論の結果との間に深いつながりが存在することが電磁的相互作用の最大の特徴であるといえる。このことは結局光子の質量が 0 であることに起因している。

演習問題 3.

1. $k = \mathcal{E}(2p) - \mathcal{E}(1s)$ の近傍で光子が水素原子により散乱されるときの散乱断面積を求めよ。ただし入射光は偏光していないとする。

2. 荷電をもった調和振動子と輻射場との相互作用は

$$H = \frac{1}{2m}(\boldsymbol{p} - e\boldsymbol{A})^2 + \frac{1}{2}Kr^2 + H_{\mathrm{rad}}$$

で与えられる。第一励起状態 $(2p)$ から光を出して基底状態 $(1s)$ へ落ちるときの崩壊幅を求めよ。ただし電気的双極子近似を用いよ。

3. 上の問題の 3 次元荷電調和振動子による光子の散乱の断面積を求めよ。

4. 荷電調和振動子による光の散乱を古典論を用いて計算せよ。

4. 散乱の一般論

4-1 散乱問題と因果律

Schrödinger 方程式を解くと，一般に束縛状態と散乱状態とが得られる。この場合特に重要なことは，境界条件をいかにして設定するかという問題である。ここでは散乱問題における境界条件が因果律を用いて設定されることを示す。ここで用いる因果律は，Stueckelberg の因果律の一種の変形であって**巨視的因果律**とよばれるものである。すなわち，“ポテンシャル V を時間 t の関数 $V(t)$ とみなしたときに，t が T 以前では $V(t)=0$ ならば，T 以前では $\psi_{\text{scatt}}(t)=0$ となる”，すなわち，散乱の原因となるポテンシャル導入以前に，散乱の結果である散乱波が生ずることはないという因果律である。

散乱問題における因果律を上の形で使い，その結果において $T\to-\infty$ とする。このような極限をうまくとれるという仮説が**断熱仮説**である。そこでまず，時間を含む Schrödinger 方程式から出発する。

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi(t)=\{H_0+V(t)\}\psi(t) \tag{1}$$

ただし $V(t)$ は，上の因果律を使用するために次の形に設定される。

$$V(t)=\begin{cases} V & (t>T) \\ 0 & (t<T) \end{cases} \tag{2}$$

$t<T$ に対しては粒子は自由な方程式に従う。

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi(t)=H_0\psi(t) \tag{3}$$

この波動方程式の解は，散乱を受けない入射波を表わすので $\psi_{\text{in}}(t)$ と書く。そうすると，一般の時間における波動関数は

$$\psi(t)=\psi_{\rm in}(t)+\psi_{\rm scatt}(t) \tag{4}$$

と書かれる。この形を(1)に代入すると

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t}-H_0\right)\psi_{\rm scatt}(t)=V(t)\psi(t) \tag{5}$$

因果律によれば，$t<T$ に対して $\psi_{\rm scatt}(t)=0$ であるから，この条件を満たすように，方程式(5)に対する次のような Green 関数を導入する。

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t}-H_0\right)K_{\rm ret}(t,\boldsymbol{x};t',\boldsymbol{x}')=\delta(t-t')\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') \tag{6}$$

$$K_{\rm ret}(t,\boldsymbol{x};t',\boldsymbol{x}')=0 \quad (t<t' \text{ の場合})$$

これは $S_{\rm ret}$，$\Delta_{\rm ret}$ と同種の**遅延 Green 関数**であって，ただ非相対論的近似において考えられているだけである。これを用いて(5)の形式解は

$$\psi_{\rm scatt}(t,\boldsymbol{x})=\int_{-\infty}^{\infty}K_{\rm ret}(t,\boldsymbol{x}';t',\boldsymbol{x}')V(t',\boldsymbol{x}')\psi(t',\boldsymbol{x}')dt'd^3x' \tag{7}$$

で与えられる。この解はたしかに Schrödinger 方程式(5)を満たし，かつ $t<T$ に対しては消える。なぜならば被積分項が生き残るのは $t\geq t'\geq T$ に対してだけだからである。そこで処方どおり $T\to-\infty$ とすると $V(t,\boldsymbol{x})$ の t 依存性はなくなり $V(\boldsymbol{x})$ のような位置座標のみによる量になってしまうから

$$\psi_{\rm scatt}(t,\boldsymbol{x})=\int d^3x'\int_{-\infty}^{\infty}dt'K_{\rm ret}(t,\boldsymbol{x};t',\boldsymbol{x}')V(\boldsymbol{x}')\psi(t',\boldsymbol{x}') \tag{8}$$

また H_0 が時空座標を陽に含んでいなければ，$K_{\rm ret}$ は次の形に書ける。

$$K_{\rm ret}(t,\boldsymbol{x};t',\boldsymbol{x}')=K_{\rm ret}(t-t';\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') \tag{9}$$

さて(8)は，Schrödinger 方程式と因果律とを組み合わせて得られたものであるが，この式に $\psi_{\rm in}$ を加えると

$$\begin{aligned}\psi(t,\boldsymbol{x})&=\psi_{\rm in}(t,\boldsymbol{x})+\psi_{\rm scatt}(t,\boldsymbol{x})\\&=\psi_{\rm in}(t,\boldsymbol{x})+\int d^3x'dt'K_{\rm ret}(t-t';\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')V(\boldsymbol{x}')\psi(t',\boldsymbol{x}')\end{aligned} \tag{10}$$

これが，入射波を与えられたときに，全体の波動関数を決定する積分方程式である。この方程式を時間によらない形に書き直してみよう。そのために

$$\begin{aligned}\psi_{\rm in}(t,\boldsymbol{x})&=e^{-iEt}\psi_{\rm in}(\boldsymbol{x})\\ \psi(t,\boldsymbol{x})&=e^{-iEt}\psi(\boldsymbol{x})\end{aligned} \tag{11}$$

とおくと

$$\psi(\boldsymbol{x})=\psi_{\rm in}(\boldsymbol{x})+\int d^3x'G(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}';E)V(\boldsymbol{x}')\psi(\boldsymbol{x}') \tag{12}$$

ただし

$$G(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'\,;\,E)=\int dt' e^{iE(t-t')}K_{\mathrm{ret}}(t-t'\,;\,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') \tag{13}$$

さて上の方程式の具体的な形を知るためには K_{ret} を求めなければならない。

$$K_{\mathrm{ret}}(t-t'\,;\,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')=\frac{1}{(2\pi)^4}\int dE\,d^3p\exp\{i\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')-iE(t-t')\}K(E,\,\boldsymbol{p})$$

$$\delta(t-t')\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')=\frac{1}{(2\pi)^4}\int dE\,d^3p\exp\{i\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')-iE(t-t')\}$$

とおいて方程式(6)に代入すると，$H_0=\boldsymbol{p}^2/2m$ としたときに次の式が得られる。

$$\left(E-\frac{\boldsymbol{p}^2}{2m}\right)K(E,\,\boldsymbol{p})=1 \tag{14}$$

さてこの方程式の解で，遅延性の条件を満たすものは後に示すように

$$K(E,\,\boldsymbol{p})=\frac{1}{E-(\boldsymbol{p}^2/2m)+i\varepsilon} \tag{15}$$

すなわち，

$$K_{\mathrm{ret}}(t-t'\,;\,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')=\frac{1}{(2\pi)^4}\int dE\,d^3p\frac{\exp\{i\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')-iE(t-t')\}}{E-(\boldsymbol{p}^2/2m)+i\varepsilon} \tag{16}$$

この式を(13)に代入すれば

$$\begin{aligned}G(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'\,;\,E)&=\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3p\frac{e^{i\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')}}{E-(\boldsymbol{p}^2/2m)+i\varepsilon}\\&=\frac{2m}{(2\pi)^3}\int d^3p\frac{e^{i\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')}}{k^2-\boldsymbol{p}^2+i\varepsilon}\qquad\left(E\equiv\frac{k^2}{2m}\right)\\&=-\frac{m}{2\pi}\frac{e^{ik|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\end{aligned} \tag{17}$$

これから波動関数を定める積分方程式は次のように与えられる。

$$\psi(\boldsymbol{x})=\psi_{\mathrm{in}}(\boldsymbol{x})-\frac{m}{2\pi}\int d^3x'\frac{e^{ik|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}V(\boldsymbol{x}')\psi(\boldsymbol{x}') \tag{18}$$

波動関数の漸近形　次に波動関数の漸近形を求めるために，Rを力の到達距離(range)としたときに，$|\boldsymbol{x}|\gg R>|\boldsymbol{x}'|$ に対して，$|\boldsymbol{x}'|/|\boldsymbol{x}|$ についてのべき展開を利用して，最初の主な項だけを残すと

$$\psi(\boldsymbol{x})\sim\psi_{\mathrm{in}}(\boldsymbol{x})-\frac{m}{2\pi}\frac{e^{ikr}}{r}\int d^3x' e^{-i\boldsymbol{k}_f\boldsymbol{x}'}V(\boldsymbol{x}')\psi(\boldsymbol{x}') \tag{19}$$

ただし $r=|\boldsymbol{x}|$ であり，$\boldsymbol{k}_f$ は $\boldsymbol{k}_f=k\boldsymbol{x}/|\boldsymbol{x}|$ で定義されている。そこで

$$\psi_{\mathrm{in}}(\boldsymbol{x})=e^{ikz} \tag{20}$$

とおくと，ψ の漸近形は標準形に書ける。

$$\psi \sim e^{ikz}+\frac{e^{ikr}}{r}f(\theta) \tag{21}$$

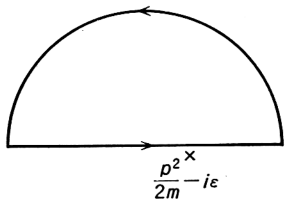
$$f(\theta)=-\frac{m}{2\pi}\int d^3x' e^{-i\boldsymbol{k}_f\boldsymbol{x}'}V(\boldsymbol{x}')\psi(\boldsymbol{x}') \tag{22}$$

ただし，θ は $\boldsymbol{k}_f$ と z 軸とのなす角，つまり散乱角である。$f(\theta)$ はすでに **1-13** で導入した散乱振幅であり，その絶対値の 2 乗が散乱の微分断面積を与える。(21)の一般形は **1-13** で与えたが，(22)のような具体的な形は上のような波動方程式を用いた議論をしないと求まらない。とにかくここでの議論と **1-13** とをつなげると，断面積に関する完全な議論となる。

$K_{\rm ret}$ の遅延性　(15)を用いたときに，$t-t'<0$ ならば $K_{\rm ret}=0$ となることを証明しよう。さて

$$K_{\rm ret}(t-t';\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')=\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^3p\, e^{i\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')}\int dE\frac{e^{-iE(t-t')}}{E-(\boldsymbol{p}^2/2m)+i\varepsilon} \tag{23}$$

いま $t-t'<0$ のときに，4·1 図のような積分路を選んで E についてまず積分してやる。分母の極は半円の外側にあり，指数関数は Im $E>0$，すなわち上半面で減少するから，半円の半径を ∞ にした極限で半円に沿っての積分は 0 になる。したがって Eに関する積分は, Cauchy の定理により，$t-t'<0$ のときには 0 になる。



4·1 図　複素 E 平面における積分路

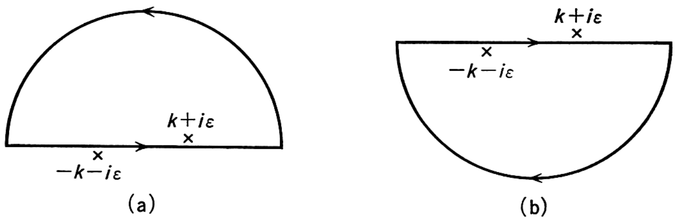
(17)式の証明

$$\begin{aligned}\int d^3p\frac{e^{i\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')}}{k^2-p^2+i\varepsilon}&=2\pi\int_0^\infty p^2dp\int_{-1}^1 d(\cos\theta)\frac{e^{ipr\cos\theta}}{k^2-p^2+i\varepsilon}\\&=2\pi\int_0^\infty p^2dp\frac{e^{ipr}-e^{-ipr}}{ipr}\frac{1}{k^2-p^2+i\varepsilon}\\&=\frac{2\pi}{r}\int_{-\infty}^\infty p\,dp\sin pr\frac{1}{k^2-p^2+i\varepsilon}\\&=\frac{2\pi}{r}\frac{\partial}{\partial r}\int_{-\infty}^\infty dp\frac{\cos pr}{p^2-(k^2+i\varepsilon)}\\&=\frac{\pi}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left\{\int_{-\infty}^\infty dp\frac{e^{ipr}}{p^2-(k^2+i\varepsilon)}\right.\\&\qquad\left.+\int_{-\infty}^\infty dp\frac{e^{-ipr}}{p^2-(k^2+i\varepsilon)}\right\}\end{aligned} \tag{24}$$

この二つの積分の積分路として，それぞれ 4·2 図の(a), (b)を選べば，直ちに留数が計算できて，

$$=\frac{\pi}{r}(2\pi i)\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e^{ikr}}{2k}+\frac{e^{ikr}}{2k}\right)=-\frac{2\pi^2}{r}e^{ikr} \tag{25}$$

この結果から直ちに(17)が出る。



4·2 図 (a) (23)の第一項の積分の複素 p 平面における積分路, (b) (23)の第二項の積分の複素 p 平面における積分路

4-2 散乱振幅の部分波分解—Rayleigh, Faxen and Holtsmark の公式

前節における散乱の一般論では，すべての角運動量状態をまとめて議論したが，実際の取り扱いでは別々の角運動量状態について分解して考えた方が便利なことが多い。特に低エネルギーで便利である。そこで散乱振幅を**部分波**に分解することを考える。ポテンシャル V を r のみの関数とし，中心力のポテンシャルとする。入射波の方向を z 軸に選べば，この系は z 軸のまわりの回転に対して不変であるから，波動関数は r と θ のみの関数となり，次の展開を許す。

$$\psi(r,\theta)=\frac{1}{r}\sum_{l=0}^{\infty}f_l(r)P_l(\cos\theta) \tag{1}$$

いま $2mE=k^2$, $2mV=U$ とおけば，Schrödinger 方程式は

$$\{\Delta-U(r)+k^2\}\psi(r,\theta)=0 \tag{2}$$

ここに(1)の展開を代入すると

$$\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{r}P_l(\cos\theta)\left\{\frac{d^2}{dr^2}-\frac{l(l+1)}{r^2}-U(r)+k^2\right\}f_l(r)=0 \tag{3}$$

そこで **Legendre 多項式**の直交性

$$\int_{-1}^{1}dxP_l(x)P_{l'}(x)=\frac{2}{2l+1}\delta_{ll'} \tag{4}$$

を用いると，個々の $f_l(r)$ に対する方程式が得られる。

$$\left\{\frac{d^2}{dr^2}-\frac{l(l+1)}{r^2}-U(r)+k^2\right\}f_l(r)=0 \tag{5}$$

この $f_l(r)$ の原点付近でのふるまいを調べるために，$U(r)$ は r^{-2} より特異性が低いとすると，原点のまわりでの $f_l(r)$ の展開式

$$f_l(r)=r^{\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}a_n r^n \tag{6}$$

より α に対する指示方程式を得る。それを解くと

$$\alpha=l+1,\ -l \tag{7}$$

が得られる。ところが最初の展開式(1)は $f_l(0)=0$ を要求するから，結局

$$f_l(r)\propto r^{l+1} \qquad (r\to 0) \tag{8}$$

次に r が大きい所でのふるまいを調べる。$U(r)$ は力の到達距離の短いポテンシャルであるとすると，(5)は次の式に帰着する。

$$\left\{\frac{d^2}{dr^2}-\frac{l(l+1)}{r^2}+k^2\right\}f_l(r)\approx 0 \qquad (r\to\infty) \tag{9}$$

この解として1次独立なものは二つあり

$$s_l(kr)=krj_l(kr), \qquad c_l(kr)=-krn_l(kr) \tag{10}$$

ただし

$$x\to 0 \qquad s_l(x)\sim\frac{x^{l+1}}{(2l+1)!!}, \qquad c_l(x)\sim\frac{(2l-1)!!}{x^l} \tag{11}$$

$$x\to\infty \qquad s_l(x)\sim\sin\left(x-\frac{l\pi}{2}\right), \qquad c_l(x)\sim\cos\left(x-\frac{l\pi}{2}\right) \tag{12}$$

ここで $s_l(x)$ とか $c_l(x)$ の具体的な形は必要ないが，l の小さい $s_l(x)$，$c_l(x)$ を少し書いておく。

$$s_0(x)=\sin x, \quad s_1(x)=\frac{\sin x}{x}-\cos x, \quad \cdots$$

$$c_0(x)=\cos x, \quad c_1(x)=\frac{\cos x}{x}+\sin x, \quad \cdots$$

さて"$U(r)$ を実数と仮定する"と，$f_l(r)$ の方程式の正則な解として実数の解をとることができるから，A_l を適当な複素数とした場合にその**漸近形**は

$$\begin{aligned} f_l(r)&\sim A_l\{\cos\delta_l\, s_l(kr)+\sin\delta_l\, c_l(kr)\}\\ &\sim A_l\sin\left(kr-\frac{l\pi}{2}+\delta_l\right) \end{aligned} \tag{13}$$

と書くことができる。δ_l を l 波の**位相のずれ**(phase shift)とよぶ。すると

$$\psi(r,\theta)\sim\frac{1}{r}\sum_{l=0}^{\infty}A_l\sin\left(kr-\frac{l\pi}{2}+\delta_l\right)P_l(\cos\theta) \tag{14}$$

次に $U(r)$ がない場合の解である入射波 e^{ikz} を同様に展開してみよう。

$$e^{ikz}=\frac{1}{r}\sum_{l=0}^{\infty}g_l(r)P_l(\cos\theta) \tag{15}$$

係数を求めるには再び P_l の直交性を用いる。

$$\frac{g_l(r)}{r}=\frac{2l+1}{2}\int_{-1}^{1}e^{ikrt}P_l(t)dt$$
$$=\frac{2l+1}{2}\left\{\frac{1}{ikr}\left[e^{ikrt}P_l(t)\right]_{-1}^{1}-\frac{1}{ikr}\int_{-1}^{1}e^{ikrt}P_l'(t)dt\right\}$$

ここでどんどん部分積分をしてゆくと $1/ikr$ のべき展開となるから，$r\to\infty$ では第一項のみを残し

$$\{\text{〃}\}\sim\frac{1}{ikr}\{e^{ikr}-(-1)^l e^{-ikr}\}$$
$$=2i^l(kr)^{-1}\sin\left(kr-\frac{1}{2}l\pi\right)\qquad(r\to\infty) \tag{16}$$

ところが $g_l(r)$ は(9)を満たす正則な解であるから $s_l(kr)$ に比例する。そこで(16)と $s_l(kr)$ の漸近形(12)とを比較して

$$\frac{g_l(r)}{r}=\frac{2l+1}{kr}i^l s_l(kr) \tag{17}$$

$$e^{ikz}=\frac{1}{kr}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)i^l s_l(kr)P_l(\cos\theta) \tag{18}$$

さて(13)で定義した A_l を決めるのは次の条件である。ψ と e^{ikz} との漸近形の差は e^{ikr}/r に比例すべきであるから，それぞれの漸近形の e^{-ikr}/r の係数は一致すべきである。この条件から

$$A_l=\frac{2l+1}{k}i^l e^{i\delta_l} \tag{19}$$

すなわち

$$\psi\sim\frac{1}{kr}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)i^l e^{i\delta_l}\sin\left(kr-\frac{1}{2}l\pi+\delta_l\right)P_l(\cos\theta) \tag{20}$$

これに対して

$$e^{ikz}\sim\frac{1}{kr}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)i^l\sin\left(kr-\frac{1}{2}l\pi\right)P_l(\cos\theta) \tag{21}$$

この差をとると

$$f(\theta)=\frac{1}{k}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)e^{i\delta_l}\sin\delta_l P_l(\cos\theta) \tag{22}$$

これから**全断面積**(total cross section)を計算すると

$$\sigma=\int d\Omega|f(\theta)|^2=\sum_{l=0}^{\infty}\sigma_l=\frac{4\pi}{k^2}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\sin^2\delta_l \tag{23}$$

ここに σ_l は**部分断面積**(partial cross section)とよばれ

$$\sigma_l=\frac{4\pi}{k^2}(2l+1)\sin^2\delta_l\leq\frac{4\pi}{k^2}(2l+1) \tag{24}$$

また(22)から $\mathrm{Im}\, f(0)$ を計算すると

$$\mathrm{Im}\, f(0)=\frac{1}{k}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\sin^2\delta_l \tag{25}$$

ゆえに

$$\sigma=\frac{4\pi}{k}\,\mathrm{Im}\, f(0) \tag{26}$$

このように全断面積と，前方散乱振幅の虚数部との間には簡単な関係がある。この関係式を**光学定理**(optical theorem)とよぶ。この全断面積には非弾性散乱まで含めて成り立つことを後に証明する。この節では非弾性散乱はないと仮定している。

さて部分波展開が有用であるのは，収束が速い場合だけである。このようなことは，ポテンシャルが短い到達距離をもち，エネルギーが低い場合に起こる。どのような部分波が効くかについての説明のため次の古典的な議論を与える。

ポテンシャルの到達距離を a とすると，**衝突径数** b が $b<a$ の場合にのみ衝突が起こる。さて運動量を k とすると

$$l=bk\leq ak \tag{27}$$

したがって与えられた運動量 k に対して，(27)を満たすような l だけが重要である。もちろん古典論と違ってトンネル効果のために $l>ak$ に対する δ_l も 0 ではないが，一般に非常に小さい。そこで非常に低いエネルギーでは S 波が最も重要である。それに反してエネルギーが高くなると Born 近似が有効になってくる。

4-3 Born 近似

4-1 の(22)から散乱振幅を計算するためには $\psi(\boldsymbol{x})$ を知らねばならない。この ψ は方程式(18)を解かなければわからない。そこで場合によっては $\psi(\boldsymbol{x})$ を $\psi_{\mathrm{in}}(\boldsymbol{x})$ で近似して $f(\theta)$ を計算することもある。これを **Born 近似**とよぶ。Born 近似における散乱振幅の近似式は

$$f(\theta)\approx-\frac{m}{2\pi}\int d^3x e^{i(\boldsymbol{k}_i-\boldsymbol{k}_f)\boldsymbol{x}}V(\boldsymbol{x}) \tag{1}$$

ただし $\psi_{\mathrm{in}}(\boldsymbol{x})=e^{i\boldsymbol{k}_i\boldsymbol{x}}$ とおいている。これは結局粒子がポテンシャルによりただ1回だけ散乱されると仮定したことに相当する。明らかにこの近似

がよいのは，ポテンシャルが弱いときであり，また高エネルギーのときである。なぜならば，低エネルギー粒子は散乱された後にも力の中心の近所でうろうろしているから，また引き続き散乱される確率が大きいが，高エネルギー粒子だと散乱された後でさっさと逃げてしまうので，またポテンシャルに捕まって散乱される機会が少なくなるからである。

例題として，湯川ポテンシャルをとってみる。

$$V(r)=A\frac{e^{-\mu r}}{r} \tag{2}$$

このとき，$\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}_i-\boldsymbol{k}_f$ とすると Born 近似での散乱振幅は

$$f(\theta)=-\frac{m}{2\pi}A\int d^3x\, e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}}\frac{e^{-\mu r}}{r} \tag{3}$$

極座標を導入すると，$k'=|\boldsymbol{k}|$ として

$$\begin{aligned}\int d^3x\, e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}}\frac{e^{-\mu r}}{r}&=\int_0^\infty r^2dr\int_{-1}^1 d(\cos\theta)\int_0^{2\pi}d\varphi\, e^{ik'r\cos\theta}\frac{e^{-\mu r}}{r}\\&=\frac{2\pi}{ik'}\int_0^\infty dr(e^{ik'r-\mu r}-e^{-ik'r-\mu r})\\&=\frac{2\pi}{ik'}\left(\frac{1}{\mu-ik'}-\frac{1}{\mu+ik'}\right)\\&=\frac{4\pi}{\mu^2+k'^2}\end{aligned} \tag{4}$$

ところが $\boldsymbol{k}_i^2=\boldsymbol{k}_f^2=k^2$ とおくと，$k'^2=(\boldsymbol{k}_i-\boldsymbol{k}_f)^2=4k^2\sin^2\frac{\theta}{2}$ だから

$$f(\theta)=-\frac{2mA}{\mu^2+4k^2\sin^2(\theta/2)} \tag{5}$$

特に，$A=-Ze^2$, $\mu=0$ とおけば，湯川ポテンシャルは Coulomb ポテンシャルに帰する。

$$V(r)=-\frac{Ze^2}{r} \tag{6}$$

したがって散乱振幅は

$$f(\theta)=\frac{mZe^2}{2k^2\sin^2(\theta/2)} \tag{7}$$

これから微分断面積を求めると Rutherford の公式が再現される。

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{m^2Z^2e^4}{4k^4\sin^4(\theta/2)}=\frac{Z^2e^4}{4m^2v^4\sin^4(\theta/2)} \tag{8}$$

4-4 S 波散乱の例題

4-2 で部分波の従うべき方程式と境界条件を導出した。

$$\left\{\frac{d^2}{dr^2}-\frac{l(l+1)}{r^2}-U(r)+k^2\right\}f_l(r)=0 \tag{1}$$

$$\begin{aligned} f_l(r) &\propto r^{l+1} \qquad (r\to 0)\\ &\sim \sin\left(kr-\frac{1}{2}l\pi+\delta_l\right) \qquad (r\to\infty) \end{aligned} \tag{2}$$

解をこのような条件で求め，δ_l を定めるのが目的である。この節では $l=0$ の解を簡単な場合につき求めてみよう。以下では問題と関係のない A_l を落としておく。

剛体球ポテンシャル　次のようなポテンシャルを剛体球ポテンシャルとよぶ。

$$U(r)=\begin{cases}\infty & (r<a)\\ 0 & (r>a)\end{cases} \tag{3}$$

この場合には $r<a$ では $f_0(r)=0$ となり，連続性から

$$f_0(a)=0 \tag{4}$$

次に $r>a$ では，方程式(1)の解は次の形をしていなければならない。

$$f_0(r)=\sin(kr+\delta_0) \tag{5}$$

ところが境界条件(4)が満たされていなければならないから，

$$ka+\delta_0=0 \tag{6}$$

一般にはこれを $n\pi$ に等しいとおくべきだが，それによって新しい独立な解は得られないので，(6)の解のみを考えれば十分である。したがって

$$\delta_0=-ka \tag{7}$$

$$f_0(r)=\sin\{k(r-a)\} \tag{8}$$

が，剛体球ポテンシャルに対する厳密解となる。

箱型ポテンシャル　箱型ポテンシャルは次式で定義される。

$$U(r)=\begin{cases}U & (r<a)\\ 0 & (r>a)\end{cases} \tag{9}$$

したがって f_0 の方程式は領域によって次のように分けられる。

$$\begin{aligned} f_0''-Uf_0+k^2f_0&=0 \qquad (r<a)\\ f_0''+k^2f_0&=0 \qquad (r>a)\end{aligned} \tag{10}$$

まず $k^2-U\equiv K^2$ とおくと，$r<a$ では $f_0(0)=0$ より

$$f_0(r)=A\sin Kr \tag{11}$$

次に $r>a$ では

$$f_0(r)=\sin(kr+\delta_0) \tag{12}$$

さて $f_0(r)$ と $f_0'(r)$ が $r=a$ で連続という条件より

$$\begin{aligned} A\sin Ka &= \sin(ka+\delta_0) \\ AK\cos Ka &= k\cos(ka+\delta_0) \end{aligned} \tag{13}$$

この比をとって A を消去すると

$$K\cot Ka=k\cot(ka+\delta_0) \tag{14}$$

これが δ_0 を決める方程式である。これから $\cot\delta_0$ を解くと

$$k\cot\delta_0=\frac{(K\cot Ka)(k\cot ka)+k^2}{k\cot ka-K\cot Ka} \tag{15}$$

特に $k\sim 0$ では

$$k\cot\delta_0=\frac{1}{a}\cdot\frac{(a\sqrt{-U})\cot(a\sqrt{-U})}{1-(a\sqrt{-U})\cot(a\sqrt{-U})}+O(k^2) \tag{16}$$

また(15)で $U\to\infty$ とすると右辺は $-(1/a)+O(k^2)$ となり，剛体球のときの結果と一致する。さてポテンシャルが弱いとして $|a\sqrt{-U}|\ll 1$ を仮定すると，

$$k\cot\delta_0\approx-\frac{3}{a^3U} \tag{17}$$

もしポテンシャルが引力で $U<0$ ならばこの右辺は正に，斥力で $U>0$ ならば右辺は負になる。このことが位相のずれの符号に関する知識を提供する。さてここでは散乱問題を解いたが，実は後で論ずるように散乱状態の知識から束縛状態のエネルギー準位を決めることができる。そこでその準備として束縛状態の問題も解いておく。

箱型ポテンシャルによる束縛状態　さてこの場合は当然 $U<0$ を仮定しなければならない。束縛状態では $k^2<0$ であるから，$-k^2=\gamma^2$ とおくと k は虚数で γ は実数である。束縛状態では

$$K^2=k^2-U=|U|-\gamma^2>0 \tag{18}$$

したがって二つの領域における解は

$$\begin{aligned} f_0(r)&=\sin Kr \qquad (r<a) \\ f_0(r)&=Ae^{-\gamma r} \qquad (r>a) \end{aligned} \tag{19}$$

そこで $r=a$ における連続性の条件から

$$\begin{aligned} \sin Ka &= Ae^{-\gamma a} \\ K\cos Ka &= -A\gamma e^{-\gamma a} \end{aligned} \tag{20}$$

両者の比をとると γ を決める方程式が出る。

$$K\cot Ka=-\gamma \tag{21}$$

あるいは $\sqrt{|U|-\gamma^2}\cot(a\sqrt{|U|-\gamma^2})=-\gamma$

後にこの条件を位相のずれから出すことを考える。これについては 4-6 参照。

4-5 effective range の理論

前節ではS波の位相のずれを決める例題を解いたが，低エネルギーではあまりポテンシャルの形によらず，少数のパラメーターで位相のずれの性質が表現される。ただしポテンシャルは到達距離の短いものでなければならない。

さて再びS波の方程式を考える。

$$\left\{\frac{d^2}{dr^2}+k^2-U(r)\right\}u_k(r)=0 \tag{1}$$

ただし $u_k(r)$ は実関数で，次の境界条件を満たす。δをS波の位相のずれとし

$$u_k(0)=0,\quad u_k(r)\sim\frac{\sin(kr+\delta)}{\sin\delta}\qquad(r\to\infty) \tag{2}$$

さて $k=0$ のときの解を $u_0(r)$ として

$$\left\{\frac{d^2}{dr^2}-U(r)\right\}u_0(r)=0 \tag{3}$$

と書き，(1)と(3)とからポテンシャル $U(r)$ を消去すると

$$u_0\frac{d^2u_k}{dr^2}-u_k\frac{d^2u_0}{dr^2}+k^2u_0u_k=0 \tag{4}$$

この式はポテンシャルによらないから，$U=0$ のときでも同様な式が得られる。

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+k^2\right)w_k(r)=0 \tag{5}$$

を導入し，境界条件として次の式を用いる。

$$w_k(r)\longrightarrow u_k(r)\qquad(r\to\infty) \tag{6}$$

そうすると，$w_k(r)$ に対しても(4)が成り立つから

$$w_0\frac{d^2w_k}{dr^2}-w_k\frac{d^2w_0}{dr^2}+k^2w_0w_k=0 \tag{7}$$

(4)と(7)との差をとり，0から∞まで積分すると

$$[u_0u_k'-u_ku_0']_0^\infty-[w_0w_k'-w_kw_0']_0^\infty=k^2\int_0^\infty(w_0w_k-u_0u_k)dr \tag{8}$$

さて $r\to\infty$ では左辺の 2 項は互いに消し合い，$r=0$ では左辺の第一項は消えるから

$$\left[w_0\frac{dw_k}{dr}-w_k\frac{dw_0}{dr}\right]_{r=0}=k^2\int_0^\infty(w_0w_k-u_0u_k)dr \tag{9}$$

ところで $w_0=\lim\limits_{k\to 0}w_k$ とすると

$$w_k=\frac{\sin(kr+\delta)}{\sin\delta}=\cos kr+\cot\delta\sin kr \tag{10}$$

より

$$w_0=\lim_{k\to 0}w_k=1+r\lim_{k\to 0}k\cot\delta \tag{11}$$

そこで **scattering length**(**散乱長**) a を次式で定義する。

$$\frac{1}{a}=-\lim_{k\to 0}k\cot\delta \tag{12}$$

そうすると

$$w_0=1-\frac{r}{a} \tag{13}$$

この結果を(9)の左辺に代入すると

$$k\cot\delta=-\frac{1}{a}+k^2\int_0^\infty(w_kw_0-u_0u_k)dr \tag{14}$$

この式の右辺を k^2 について展開すれば

$$k\cot\delta=-\frac{1}{a}+\frac{1}{2}k^2r_0+O(k^4) \tag{15}$$

$$r_0=2\int_0^\infty(w_0{}^2-u_0{}^2)dr \tag{16}$$

この r_0 を **effective range**(**有効到達距離**)とよぶ。低エネルギーでは(15)の右辺第二項だけで十分よい近似である。この近似式を **effective range formula** とよぶ†。散乱長，有効到達距離等はあまりよい訳語ではないから英語のまま使った方が妥当であろう。非常に低いエネルギーでは(15)の第一項だけでよい近似であろう。このときには散乱は S 波に限られていると考えてよいから

$$\sigma\approx\sigma_0=\frac{4\pi}{k^2}\sin^2\delta_0\approx 4\pi a^2\qquad(k\to 0) \tag{17}$$

したがって scattering length は，非常に低いエネルギーでの標的の大きさを与える量であると解釈される。低いエネルギーではこの二つのパラメーターさえ実験と合わせれば，ポテンシャルの形によらずに実験データを

---

† この式はたとえば核子・核子散乱では 10 MeV くらいまでよい近似である。

説明できる。

4-6 S 行列と束縛状態

一般に l 波の波動関数の漸近形を $f_l(r)$ に対して書くと，4-2 で論じたことから次のようになる。

$$f_l(r) \sim \exp\left\{-i\left(kr-\frac{l\pi}{2}\right)\right\}-S_l \exp\left\{i\left(kr-\frac{l\pi}{2}\right)\right\} \qquad (1)$$

ただし第一項が内向きの球面波，第二項が外向きの球面波を表わし，S_l は

$$S_l=e^{2i\delta_l} \qquad (2)$$

で定義される。ポテンシャルがなく，したがって散乱が起きない場合には S_l は 1 になる。さてこの S_l ($l=0, 1, 2, \cdots$) の集まりを S 行列とよぶ。

$$S=\begin{pmatrix} S_0 & & & \\ & S_1 & & \\ & & S_2 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} \qquad (3)$$

2-4 で S 行列はすでに導入されたが，上のものは特に角運動量を対角化する表示で書かれたものである。行列要素の S_l は k の関数であるから $S_l(k)$ と書く。またこうして定義された S 行列は明らかにユニタリーである。そしてこのユニタリー性を保証するのは，4-2 の議論を調べるとわかるようにポテンシャルが実数であるという条件である†。4-11 でポテンシャルによる散乱だけでなく，もっと一般的な非弾性散乱のチャンネル等が存在する場合でも S 行列がユニタリーとなることを証明する。

さてこの節では S_l の性質を $l=0$ の場合について調べる。この結果は $l>0$ の場合に容易に拡張できる。さて微分方程式

$$\left\{\frac{d^2}{dr^2}-U(r)+k^2\right\}f_0(r)=0 \qquad (4)$$

は二つの 1 次独立な解をもっているので，二つの解を次のように漸近形によって定義する。

$$\lim_{r\to\infty} e^{\pm ikr}f(\pm k, r)=1 \qquad (5)$$

さて波動関数 $f_0(r)$ の漸近形は，(1)により次のように与えられる。

$$f_0(r) \sim e^{-ikr}-S(k)e^{ikr} \qquad (6)$$

---

† したがって本節の議論はすべてこの仮定のうえに立っている。

ただし本節では $S_0(k)$ を簡単に $S(k)$ と書く。$f_0(r)$ は $f(\pm k, r)$ を用いて

$$f_0(r)=f(k, r)-S(k)f(-k, r) \tag{7}$$

と書かれる。ところで $f_0(0)=0$ であるから，(7)で $r=0$ とおけば

$$S(k)=\frac{f(k, 0)}{f(-k, 0)} \tag{8}$$

次に $f(-k, 0)=f^*(k, 0)$ であるから，δ_0 を簡単に δ と書くと

$$\delta(k)=\mathrm{Im}[\log f(k, 0)] \tag{9}$$

さて以上では k は実数と考えてきたが，k が複素数のときまで以上の議論を拡張することを考えよう。まず束縛状態に対しては $E=k^2/2m<0$ であるから，k は虚数となる。そこで $k=i\kappa$ とおき，$f(i\kappa, r)$ を次式で定義する。

$$\lim_{r\to\infty}\{f(i\kappa, r)e^{\kappa r}-e^{2\kappa r}\}=0 \tag{10}$$

それは，この関数の漸近形は $e^{\kappa r}$ だがもう一つの解は $e^{-\kappa r}$ となるから，後者が混ざらないようにするには(10)の形で定義しなければならないのである†。ただし，$V(r)<Ce^{-2\alpha' r}$ $(r\to\infty)$ としたときに，$\kappa<\alpha'$ でないと上の定義は使えない。なぜならば

$$g(r)=f(i\kappa, r)e^{\kappa r}-e^{2\kappa r} \tag{11}$$

とおいたときに，

$$g''(r)-2\kappa g'(r)=V(r)g(r)+V(r)e^{2\kappa r} \tag{12}$$

となり，$f(i\kappa, r)$ の定義は $g(\infty)=0$ を要求するが，$\kappa<\alpha'$ でなければ $g(\infty)=0$ になりえないことは(12)から明らかだからである。

今後簡単のために $f(k, 0)=f(k)$ と書き，$f(k)$ を **Jost(ヨスト)**関数とよぶ。さて，

$$S(k)=\frac{f(k)}{f(-k)}=e^{2i\delta(k)} \tag{13}$$

はもともと k が正のときに成り立つ式であるが，この式を用いて，k が負のときの $S(k)$ および $\delta(k)$ を次式で定義する。

$$S(-k)=\{S(k)\}^{-1}, \qquad \delta(-k)=-\delta(k) \tag{14}$$

さて $f(k, r)$ は微分方程式(4)と境界条件(5)とを満たす。そこで両者を組み合わせると次の積分方程式が得られる。

$$f(k, r)=e^{-ikr}+\frac{1}{k}\int_r^\infty \sin k(r'-r)U(r')f(k, r')dr' \tag{15}$$

---

† (5)をそのまま使うと後者の解を任意に混ぜることができて，$f(i\kappa, r)$ が一意的に決まらなくなってしまう。

次に $S(k)$ と束縛状態との間の関係を表わす定理を導入する。

定理 もし $f(-i\kappa)=0$ が $\kappa>0$ に対して成り立てば，$f(-i\kappa, r)$ は束縛状態の波動関数を表わし，エネルギーの固有値は $E=-\kappa^2/2m$ で与えられる。また $f(k)$ の零点は $\mathrm{Im}\, k<0$ に対して虚軸の上にしかない。

(証明)

$$\varphi(r)=f(k, r)-\frac{f(k)}{f(-k)}f(-k, r) \tag{16}$$

とおく。この関数が $k=-i\kappa$ に対して束縛状態の波動関数となるための条件は

$$\varphi(0)=0, \quad \varphi(r)\sim e^{-\kappa r} \quad (r\to\infty) \tag{17}$$

さて $\varphi(0)=0$ は明らかに成り立ち，$f(k)=0$ ならば

$$\varphi(r)=f(k, r)\sim e^{-\kappa r}$$

したがって，$f(k)=0$ が束縛状態の準位を決めることになる。

次に第二の陳述を証明する。まず(16)の $\varphi(r)$ は方程式(4)を満たす。すなわち

$$\varphi''+k^2\varphi=U\varphi \tag{18}$$

この方程式に φ^* を乗じて $r=0$ から $r=R$ まで積分すると，$\varphi(0)=\varphi^*(0)=0$ より

$$\varphi'(R)\varphi^*(R)+k^2\int_0^R|\varphi(r)|^2dr=\int_0^R\{U(r)|\varphi(r)|^2+|\varphi'(r)|^2\}dr$$
$$=\text{実数} \tag{19}$$

もし $f(k)=0$ ならば $\varphi(r)=f(k, r)\sim e^{-ikr}$ であるから，$\mathrm{Im}\, k<0$ ならば

$$\varphi^*(R),\ \varphi'(R)\longrightarrow 0 \qquad (R\to\infty) \tag{20}$$

あるいはもっと精密には

$$|\varphi'(R)\varphi^*(R)|\sim e^{-2\kappa R}\longrightarrow 0 \qquad (R\to\infty) \tag{21}$$

ゆえに(19)で $R\to\infty$ とすると

$$k^2\int_0^\infty|\varphi(r)|^2dr=\int_0^\infty\{U(r)|\varphi(r)|^2+|\varphi'(r)|^2\}dr \tag{22}$$

これから k^2 が実数であることが結論されるが，$\mathrm{Im}\, k<0$ であるから k は虚軸上になければならない。

系 もし $f(-i\kappa)=0$ が $\kappa>0$ に対して成り立てば，$k=-i\kappa$ は束縛状態で

$$S(-i\kappa)=\frac{f(-i\kappa)}{f(i\kappa)}=0, \qquad (Si\kappa)=\frac{f(i\kappa)}{f(-i\kappa)}=\infty \tag{23}$$

上述のように，$f(-i\kappa)=0$ ならば $S(-i\kappa)=0$ であるが，逆は必ずしも真ではなく，後者から出る結論は $f(-i\kappa)=0$，あるいは $f(i\kappa)=\infty$ である。すなわち S の零点は必ずしも束縛状態を表わすとは限らない。このような零点を **redundant zero**(**余計な零点**)とよぶ。

例 1. ポテンシャルが $U(r)=ae^{-r}$ で与えられる場合　この場合は $f(k, r)$ は次の形で与えられる。

$$f(k, r)=e^{-ikr}\sum_{n=0}^{\infty}c_n(k)e^{-nr} \tag{24}$$

ただし

$$\begin{aligned} c_0=1,\ \ c_n(k)&=\frac{a^n}{n!}\frac{\Gamma(2ik+1)}{\Gamma(2ik+n+1)} \\ &=\frac{a^n}{n!}\frac{1}{(n+2ik)(n-1+2ik)\cdots(1+2ik)} \end{aligned} \tag{25}$$

さて $f(k)$ の極は $k=\frac{i}{2}n$ $(n=1, 2, \cdots)$ であり，これは $a>0$ の場合を考えれば明らかに束縛状態に対応しないが

$$S\left(-\frac{in}{2}\right)=\frac{f(-in/2)}{f(in/2)}=0 \tag{26}$$

これは redundant zero の例である。

例 2. 箱型ポテンシャルに対する束縛状態　$S(-i\kappa)=0$ より束縛状態の準位が決まる例を考える。

$$S(k)=\frac{e^{i\delta}}{e^{-i\delta}}=\frac{\cos\delta+i\sin\delta}{\cos\delta-i\sin\delta}=\frac{\cot\delta+i}{\cot\delta-i} \tag{27}$$

したがって $S(k)=0$ という方程式は

$$\cot\delta+i=0 \tag{28}$$

という方程式に書きかえられる。さて箱型ポテンシャルの場合には，4-4 の(14)で与えられるように

$$\begin{aligned} K\cot Ka&=k\cot(ka+\delta) \\ &=k\frac{\cot ka\cot\delta-1}{\cot ka+\cot\delta} \end{aligned} \tag{29}$$

この式で $k=-i\gamma$, $\cot\delta=-i$ と書きかえると

$$K\cot Ka=-\gamma \qquad (K=\sqrt{|U|-\gamma^2}) \tag{30}$$

これは正に 4-4 で導き出した束縛状態の方程式(21)そのものである。このように位相のずれの解析的な形がわかれば，束縛状態が決まることが多い。

定理　負の虚軸上の $f(k)$ の零点はみな，一位である。

（証明） 元の方程式に戻ると

$$f''(k, r)+k^2f(k, r)=U(r)f(k, r) \tag{31}$$

k について変分をとると

$$f''(k+\delta k, r)+(k^2+2k\delta k)f(k+\delta k, r)=U(r)f(k+\delta k, r) \tag{32}$$

したがって(31)と(32)とを組み合わせると

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dr}\{f(k+\delta k, r)f'(k, r)-f(k, r)f'(k+\delta k, r)\}\\&=2k\delta kf(k, r)f(k+\delta k, r)\end{aligned} \tag{33}$$

次に k に関する微分をドットで表わし，束縛状態に対応して $k=k_0=-i\kappa_0(\kappa_0>0)$ とおくと

$$\dot{f}(k_0)f'(k_0, 0)=-2k_0\int_0^\infty|f(k_0, r)|^2dr \tag{34}$$

ただし，$f(k, r)$ は k が純虚数ならば実となることを使っている。また

$$[\dot{f}(k_0, r)f'(k_0, r)-f(k_0, r)\dot{f}'(k_0, r)]_{r=0}^{r=\infty}=\dot{f}(k_0)f'(k_0, 0)$$

を用いている。さて(34)から $\dot{f}(k_0)\neq0$ となり，したがって零点は一位である。

次に $f(k, r)$ と $f(-k, r)$ とのロンスキャン(Wronskian)を作ると

$$f(k, r)f'(-k, r)-f'(k, r)f(-k, r)=2ik \tag{35}$$

そこで $k=-i\kappa_0$ とおくと，束縛状態に対して

$$f'(-i\kappa_0, 0)f(i\kappa_0)=-2\kappa_0 \tag{36}$$

この式と(34)とを組み合わせると

$$\frac{f(i\kappa_0)}{\dot{f}(-i\kappa_0)}=\frac{i}{\int_0^\infty|f(-i\kappa_0, r)|^2dr} \tag{37}$$

この式は束縛状態の**規格化定数**(normalization constant)を求めるのに便利である。すなわち $f(-i\kappa_0, r)$ は r が大きい所で $e^{-\kappa_0 r}$ になるように規格化されているが，正しく規格化された波動関数を $Cf(-i\kappa_0 r)$ とすると

$$|C|^2\int_0^\infty|f(-i\kappa_0, r)|^2dr=1 \tag{38}$$

ゆえに

$$i|C|^2=\frac{f(i\kappa_0)}{\dot{f}(-i\kappa_0)} \tag{39}$$

この右辺は $S(k)$ が知れていれば計算できる。つまり $k=-i\kappa_0$ が $S(k)$ の零点であれば(23)により，$k=i\kappa_0$ は $S(k)$ の極であり，しかも上述の定理によりこの極は一位である。したがって $S(k)$ を複素 k 平面で $k=i\kappa_0$

を囲む小さな円のまわりで積分してやると，Cauchy の定理によりすぐに計算できる。

$$\oint S(k)dk \tag{40}$$

を $i\kappa_0$ をとり囲む閉曲線に沿って積分するのに，閉曲線の形はある程度任意であるから，$i\kappa_0$ を中心とする無限小の半径の円に沿って積分しよう。そうすると

$$\begin{aligned} f(-k) &= f(-i\kappa_0)-(k-i\kappa_0)\dot{f}(-i\kappa_0) \\ &= -(k-i\kappa_0)\dot{f}(-i\kappa_0) \end{aligned}$$

ゆえに

$$\begin{aligned} \oint S(k)\,dk &= \oint \frac{f(k)}{f(-k)}dk \\ &= -\frac{f(i\kappa_0)}{\dot{f}(-i\kappa_0)}\oint \frac{dk}{k-i\kappa_0} \\ &= -i|C|^2(2\pi i) \\ &= 2\pi|C|^2 \end{aligned} \tag{41}$$

一度上の積分が計算されれば，積分路は他の特異点を含まなければ，$i\kappa_0$ を囲む任意の閉曲線に沿って行なってよいから

$$|C|^2=\frac{1}{2\pi}\oint S(k)dk \tag{42}$$

この結果を Heisenberg の関係とよぶ。さて上の規格化は動径部分のみについて行なったが，3 次元の波動関数 ψ を考えるとその漸近形を

$$\psi \sim C'\frac{e^{-\kappa r}}{r} \tag{43}$$

と書いたときに，角部分を考慮に入れると

$$C'=\frac{1}{\sqrt{4\pi}}C \tag{44}$$

例 3. effective range formula に対する応用 すでに 4-5 で論じたように核力のような到達距離の短い力に対しては低エネルギーで次の effective range formula が成り立つ。

$$k\cot\delta=-\frac{1}{a}+\frac{1}{2}r_0k^2 \tag{45}$$

さて中性子・陽子系では $^3S_1$ という状態で**重陽子**(deuteron)という束縛状態が存在する。その束縛エネルギー B は $\gamma^2/2\mu$ で与えられるとする。ここに μ は慣算質量であって核子の質量の半分である。さて(45)が位相のずれ

の解析的な式であるとして上述の公式を適用してみよう†。重陽子に対して γ を求めるには

$$S(-i\gamma)=0 \tag{46}$$

を解けばよい。あるいは

$$\cot\delta+i=0 \tag{47}$$

を解く。そこで $k=-i\gamma$, $\cot\delta=-i$ を(45)に代入すると

$$\gamma=\alpha+\frac{1}{2}r_0\gamma^2 \qquad \left(\alpha=\frac{1}{a}\right) \tag{48}$$

これは γ について2次方程式であるから解は二つある。その一つは束縛状態の準位を与え，もう一つは redundant zero を与える。そこで束縛状態と redundant zero とを見分ける判別法を証明なしに与える。

定理　$\lim_{r\to\infty} e^{2\alpha' r}U(r)=0$ ならば，$\alpha'>\kappa_0>0$ の場合に $S(-i\kappa_0)=0$ となる κ_0 は束縛状態に対応する。

この定理は要するに束縛エネルギーが十分小さければ束縛状態になり，redundant zero にはならないことを意味する。

さて核力の問題では m_π をパイ中間子の質量としたときに††

$$2\alpha'\sim m_\pi$$
$$\left(\alpha<\alpha'\sim\frac{m_\pi}{2}, \qquad \text{あるいは} \quad a>\frac{2}{m_\pi}\right) \tag{49}$$

が数値的に成り立っている。すなわち $^3S_1$ に対しては

$$r_0=(1.704\pm0.028)\times10^{-13}\,\text{cm}$$
$$a=(5.39\pm0.03)\times10^{-13}\,\text{cm}$$
$$2/m_\pi\approx3\times10^{-13}\,\text{cm}$$

そこでこれだけの知識に基づいて，方程式(48)の根の判別をしてみると，γ が小さければ(48)から $\gamma\approx\alpha+\frac{1}{2}r_0\alpha^2$ を得る。これは数値的に定理の条件を満たすから重陽子に対応する。もう一つの γ は大きくなり redundant zero となる。このとき前者では $1>r_0\gamma$, 後者では $1<r_0\gamma$ となる。

次に重陽子の波動関数の規格化条件を求めてみよう。

$$\begin{aligned} k\cot\delta-ik &= -\alpha+\frac{1}{2}r_0k^2-ik \\ &= -\gamma+\frac{1}{2}r_0\gamma^2+\frac{1}{2}r_0k^2-ik \end{aligned}$$

---

† (45)を $^3S_1$ 状態で成り立つ式とする。$^1S_0$ に対しては a とか r_0 は異なる。

†† ここで核力はパイ中間子の交換により生ずると考えると，$r\to\infty$ に対して $U(r)\sim e^{-m_\pi r}$ と考えられる。

$$=(k-i\gamma)\left\{-i+\frac{1}{2}(k+i\gamma)r_0\right\} \tag{50}$$

したがって

$$\lim_{k\to i\gamma}(k-i\gamma)S(k)=\lim_{k\to i\gamma}(k-i\gamma)\frac{k\cot\delta+ik}{k\cot\delta-ik}$$
$$=\frac{2\gamma}{i(1-r_0\gamma)}$$

ゆえに

$$|C|^2=\frac{1}{2\pi}\oint_{i\gamma}S(k)dk$$
$$=\frac{1}{2\pi}(2\pi i)\lim_{k\to i\gamma}(k-i\gamma)S(k)$$
$$=\frac{2\gamma}{1-r_0\gamma}$$

これで重陽子の波動関数の規格化が決まった。4-12 でこの応用を示す。

4-7 Fredholm 理論の応用

前節で Jost 関数 $f(k)$ の重要性について述べたが，それでは $f(k)$ をどのようにして求めるかが問題となる。この節では **Fredholm（フレドホルム）の積分方程式論**を応用して求める方法を示す。

この節では $f(k, r)$ のかわりに $\varphi(0)=0$ を満たす波動関数 $\varphi(r)$ を考える[†]。

$$\varphi''(r)+k^2\varphi(r)=U(r)\varphi(r), \qquad \varphi(0)=0 \tag{1}$$

この関数 $\varphi(r)$ の満たす積分方程式は次の形に書かれる。

$$\varphi(r)=e^{-ikr}-e^{ikr}+\int_0^\infty g(r, r')U(r')\varphi(r')dr' \tag{2}$$

ただし

$$g(r, r')=-\frac{1}{2ik}\{e^{ik(r+r')}-e^{ik|r-r'|}\} \tag{3}$$

また $\varphi(r)$ の漸近形は 4-6 の(1)で与えられたように

$$\varphi(r)\sim e^{-ikr}-S(k)e^{ikr} \tag{4}$$

そこで $K(r, r')=g(r, r')U(r')$ とおくと

$$\varphi(r)=e^{-ikr}-e^{ikr}+\int_0^\infty K(r, r')\varphi(r')dr' \tag{5}$$

---

† $\varphi(r)$ は 4-2 では $f_0(r)$ と書かれている。

この方程式の形式的解は Fredholm 理論によれば

$$\varphi(r)=e^{-ikr}-e^{ikr}+\frac{1}{\Delta(k)}\int_0^\infty \Delta(k;\, r,\, r')(e^{-ikr'}-e^{ikr'})dr' \qquad (6)$$

ただし

$$\Delta(k)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^\infty dr_1\cdots\int_0^\infty dr_n \times\begin{vmatrix} K(r_1,\, r_1)K(r_1,\, r_2)\cdots K(r_1,\, r_n)\\ \vdots \\ K(r_n,\, r_1)K(r_n,\, r_2)\cdots K(r_n,\, r_n)\end{vmatrix} \qquad (7)$$

$$\Delta(k;\, r,\, r')=K(r,\, r')+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^\infty dr_1\cdots\int_0^\infty dr_n \times\begin{vmatrix} K(r,\, r') & K(r,\, r_1) & \cdots & K(r,\, r_n)\\ K(r_1,\, r') & K(r_1,\, r_1) & \cdots & K(r_1,\, r_n)\\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ K(r_n,\, r') & K(r_n,\, r_1) & \cdots & K(r_n,\, r_n)\end{vmatrix} \qquad (8)$$

さてたいせつなことは $\Delta(k)$ と $f(k)$ との関係である。

定理 $\Delta(k)=f(-k)$

(証明) $g(k,\, r)=e^{ikr}f(k,\, r)$ とおくと

$$f(k)=f(k,\, 0)=g(k,\, 0) \qquad (9)$$

ところが $g(k,\, r)$ の方程式は次の形に与えられる。

$$g(-k,\, r)=1+\frac{1}{2ik}\int_r^\infty \{e^{2ik(r'-r)}-1\}U(r')g(-k,\, r')dr' \qquad (10)$$

この方程式の逐次近似法による解を求め, $r=0$ とおくと

$$f(-k)=g(-k,\, 0)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2ik}\right)^n\int_0^\infty dr_1\int_{r_1}^\infty dr_2\cdots\int_{r_{n-1}}^\infty dr_n \times(e^{2ikr_1}-1)(e^{2ik(r_2-r_1)}-1)\cdots(e^{2ik(r_n-r_{n-1})}-1) \times U(r_1)U(r_2)\cdots U(r_n) \qquad (11)$$

他方

$$\Delta(k)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{2ik}\right)^n\int_0^\infty dr_1\int_0^\infty dr_2\cdots\int_0^\infty dr_n \times\det_{\mu\nu}\|e^{ik(r_\mu+r_\nu)}-e^{ik|r_\mu-r_\nu|}\|U(r_1)U(r_2)\cdots U(r_n) \qquad (12)$$

しかしながら被積分関数が $r_1,\, r_2,\, \cdots,\, r_n$ について対称であるから次のおきかえができる。

$$\frac{1}{n!}\int_0^\infty dr_1\int_0^\infty dr_2\cdots\int_0^\infty dr_n=\int_0^\infty dr_1\int_{r_1}^\infty dr_2\cdots\int_{r_{n-1}}^\infty dr_n$$

そこで $r_1\leq r_2\leq\cdots\leq r_n$ に対して行列式を計算してみる。$\xi_\mu=e^{ikr_\mu}$ とおく

と，(12)の第 n 項に出てくる行列式 D_n は次のように書くことができる。

$$D_n=\begin{vmatrix} \xi_1^2 & \xi_2\left(\xi_1-\frac{1}{\xi_1}\right) & \xi_3\left(\xi_1-\frac{1}{\xi_1}\right) & \cdots & \xi_{n-1}\left(\xi_1-\frac{1}{\xi_1}\right) & \xi_n\left(\xi_1-\frac{1}{\xi_1}\right) \\ \xi_2\left(\xi_1-\frac{1}{\xi_1}\right) & \xi_2^2-1 & \xi_3\left(\xi_2-\frac{1}{\xi_2}\right) & \cdots & \xi_{n-1}\left(\xi_2-\frac{1}{\xi_2}\right) & \xi_n\left(\xi_2-\frac{1}{\xi_2}\right) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \xi_{n-1}\left(\xi_1-\frac{1}{\xi_1}\right) & \xi_{n-1}\left(\xi_2-\frac{1}{\xi_2}\right) & \xi_{n-1}\left(\xi_3-\frac{1}{\xi_3}\right) & \cdots & (\xi_{n-1}^2-1) & \xi_n\left(\xi_{n-1}\frac{1}{\xi_{n-1}}\right) \\ \xi_n\left(\xi_1-\frac{1}{\xi_1}\right) & \xi_n\left(\xi_2-\frac{1}{\xi_2}\right) & \xi_n\left(\xi_3-\frac{1}{\xi_3}\right) & \cdots & \xi_n\left(\xi_{n-1}-\frac{1}{\xi_{n-1}}\right) & \xi_n^2-1 \end{vmatrix} \tag{13}$$

この行列式の要素を書く際の一般的規則は，大きい添字をもった ξ と，小さい添字をもった ξ の $\left(\xi-\dfrac{1}{\xi}\right)$ という組み合わせとの積を作ってやればよい。この式は ξ_n について偶関数であり，$\xi_n=\xi_{n-1}$ に対して消えてしまう。したがって D_n の ξ_n に対する依存性は

$$D_n=\left(\frac{\xi_n{}^2}{\xi_{n-1}^2}-1\right)F(\xi_1,\ \xi_2,\ \cdots,\ \xi_{n-1}) \tag{14}$$

で表わされる。ただし D_n は $\xi_n{}^2$ について 1 次であることを利用している。この式で $\xi_n=0$ とおくと

$$F=D_{n-1} \tag{15}$$

ゆえに

$$\begin{aligned} D_n&=\left(\frac{\xi_n{}^2}{\xi_{n-1}^2}-1\right)\left(\frac{\xi_{n-1}^2}{\xi_{n-2}^2}-1\right)\cdots\left(\frac{\xi_2{}^2}{\xi_1{}^2}-1\right)(\xi_1{}^2-1) \\ &=(e^{2ikr_1}-1)(e^{2ik(r_2-r_1)}-1)\cdots(e^{2ik(r_n-r_{n-1})}-1) \end{aligned} \tag{16}$$

したがって(11)と(12)とは完全に一致し，定理が証明されたことになる。

この定理により $S(k)$ を Fredholm 行列式 $\varDelta(k)$ で表わすと

$$S(k)=\frac{f(k)}{f(-k)}=\frac{\varDelta(-k)}{\varDelta(k)},\qquad \cot\delta=i\frac{\varDelta(-k)+\varDelta(k)}{\varDelta(-k)-\varDelta(k)} \tag{17}$$

また束縛状態の準位を決める式は

$$\varDelta(i\kappa)=0 \tag{18}$$

4-8　重心系と実験室系

いままでは与えられたポテンシャル内での一体問題を考えていたが，二体問題はこのような意味での一体問題に帰着させうることはすでに古典力学でよく知られている事実である。この節では特に二体問題の場合に生ず

る運動学的問題として**重心系**と**実験室系**との関係を考える。二体系のハミルトニアンを

$$H=\frac{\boldsymbol{p}_{\mathrm{A}}{}^2}{2m_{\mathrm{A}}}+\frac{\boldsymbol{p}_{\mathrm{B}}{}^2}{2m_{\mathrm{B}}}+V \tag{1}$$

と書く。ただしVは2粒子間の距離rのみの関数であると仮定する。そして全運動量 $\boldsymbol{P}$ および相対運動量 $\boldsymbol{p}$ を次式で定義する。

$$\boldsymbol{p}_{\mathrm{A}}=\frac{m_{\mathrm{A}}}{m_{\mathrm{A}}+m_{\mathrm{B}}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{p}, \qquad \boldsymbol{p}_{\mathrm{B}}=\frac{m_{\mathrm{B}}}{m_{\mathrm{A}}+m_{\mathrm{B}}}\boldsymbol{P}-\boldsymbol{p} \tag{2}$$

こうするとハミルトニアンは次のように書きかえられる。

$$H=\frac{\boldsymbol{P}^2}{2(m_{\mathrm{A}}+m_{\mathrm{B}})}+\frac{\boldsymbol{p}^2}{2\mu}+V \tag{3}$$

ただしμは**換算質量**で

$$\mu=\frac{m_{\mathrm{A}}m_{\mathrm{B}}}{m_{\mathrm{A}}+m_{\mathrm{B}}} \tag{4}$$

で定義される。二体問題を一体問題に帰着させた場合に出てくる質量はこれである。ここまでは完全に古典力学と同じである。なお，重心運動と相対運動とが完全に分離しうるのは非相対論的近似の特徴であり，相対論的理論では内部座標に対する依存性，たとえば束縛状態の波動関数が重心運動と完全に分離できない†。これは内部構造が当然 **Lorentz 収縮**を受ける可能性を考えれば理解できるであろう。さて(3)に戻って，相対運動を記述する Schrödinger 方程式を書いてみると

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t}=\left(\frac{\boldsymbol{p}^2}{2\mu}+V\right)\psi \tag{5}$$

となり，完全に一体系の場合と同じになる。したがって上の式から散乱振幅 $f(\theta)$ を定めることができて，それから全断面積を求めることができる。この結果は，2-4 で証明したように相対論的理論においても重心運動とは無関係である。

すなわち

$$\sigma=\int|f(\theta)|^2 d\Omega \tag{6}$$

が散乱の全断面積を与える。このことを利用して重心系における微分断面積と，実験室系における微分断面積との間に関係をつけることができる。

$$\sigma_{\mathrm{cm}}=\sigma_{\mathrm{lab}} \tag{7}$$

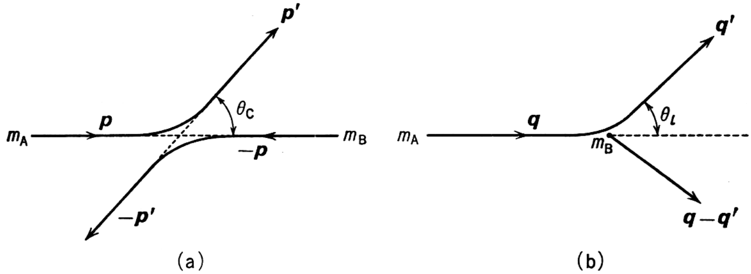
---

† このことは Bethe-Salpeter (ベーテ-サルピーター) の方程式の理論などでは明らかである。

したがって

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\rm cm} d\Omega_{\rm cm} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\rm lab} d\Omega_{\rm lab} \tag{8}$$

重心系と実験室系との関係 重心系と実験室系とにおける種々のパラメーターを 4·3 図に示す。



4·3 図 (a) 重心系における二体散乱，(b) 実験室系における二体散乱

実験室系での重心の速度 $\boldsymbol{v}$ は，$\boldsymbol{q}$ が全運動量であるから

$$\boldsymbol{v} = \frac{\boldsymbol{q}}{m_{\rm A}+m_{\rm B}}, \qquad \text{あるいは} \quad v = \frac{q}{m_{\rm A}+m_{\rm B}} \tag{9}$$

したがって重心系と実験室系の運動量の間には次の関係が見出される。

$$\boldsymbol{q} = m_{\rm A}\boldsymbol{v} + \boldsymbol{p} \tag{10}$$

ところで，(9)を(10)に代入すると $\boldsymbol{p}$ が $\boldsymbol{q}$ で表わされる。

$$\boldsymbol{p} = \frac{m_{\rm B}}{m_{\rm A}+m_{\rm B}}\boldsymbol{q} \tag{11}$$

次に散乱後を考えると

$$\boldsymbol{q}' = m_{\rm A}\boldsymbol{v} + \boldsymbol{p}' = \frac{m_{\rm A}}{m_{\rm A}+m_{\rm B}}\boldsymbol{q} + \boldsymbol{p}' \tag{12}$$

そこで(11)を(12)に代入すると

$$\boldsymbol{q}' = \frac{m_{\rm A}}{m_{\rm B}}\boldsymbol{p} + \boldsymbol{p}' \tag{13}$$

この式を進行方向の成分あるいは縦成分(longitudinal component)と進行方向に垂直な横成分(transverse component)とに分解する。まず縦成分をとると

$$q' \cos\theta_l = p' \cos\theta_{\rm c} + \frac{m_{\rm A}}{m_{\rm B}} p \tag{14}$$

ただし，q'，p などはベクトル $\boldsymbol{q}'$，$\boldsymbol{p}$ などの長さを表わし，θ_l と $\theta_{\rm c}$ とはそれぞれ実験室系および重心系における散乱角を表わす。次に横成分をとると

$$q' \sin\theta_l = p \sin\theta_c \tag{15}$$

したがって両方の成分の関係式(14)と(15)との比をとると

$$\tan\theta_l = \frac{\sin\theta_c}{\cos\theta_c + (m_A/m_B)} \tag{16}$$

これが両系における散乱角の間の関係式を与える。ところで進行方向を軸とする回転を表わす角φは両系に共通であるから

$$\varphi_l = \varphi_c \tag{17}$$

が得られる。これで両系の微分断面積の間の関係式(8)を具体的に表わせる。

$$\begin{aligned}\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{lab}} &= \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{cm}} \frac{\sin\theta_c\, d\theta_c\, d\varphi_c}{\sin\theta_l\, d\theta_l\, d\varphi_l} \\ &= \frac{\{1+(m_A/m_B)^2+2(m_A/m_B)\cos\theta_c\}^{3/2}}{1+(m_A/m_B)\cos\theta_c}\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{cm}}\end{aligned} \tag{18}$$

これが微分断面積の間の変換公式である。方程式(5)を解いて得られる$f(\theta)$から計算した$|f(\theta)|^2$は重心系での微分断面積を表わすから，実験にかかる実験室系における微分断面積を求めるにはこの式を使わなければならない。

ところで運動のエネルギーを調べてみると，実験室系では

$$T_l = \frac{\boldsymbol{q}^2}{2m_A} \tag{19}$$

他方，重心系では

$$T_c = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m_A} + \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m_B} = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2\mu} \tag{20}$$

そこで(11)を用いると両者の間に関係がつく。

$$T_c = \frac{m_B}{m_A + m_B} T_l \tag{21}$$

相対論では上の関係が全く変わり，エネルギーが高くなるとT_lは$T_c{}^2$に比例してくる。そうなると相対運動に使える部分，すなわちT_c/T_lがだんだん小さくなる。このことは換言すれば，だんだん高いエネルギーの加速器を作っても，エネルギーが高くなるほど有効に使われるエネルギーの割合T_c/T_lが減ってくることを意味する。そのために初めから重心系における衝突を起こさせるような colliding beam を用いる実験が高エネルギーでは方々で採用されている。ここでは両系の変換は，非相対論的領域に限って考えたが，相対論的変換については 1-15 の計算例を参照されたい。

さて(16)および(21)に戻り $m_A = m_B$ とおくと，(16)と(21)は

$$\tan\theta_l = \tan\frac{\theta_c}{2}, \quad \text{すなわち} \quad \theta_c = 2\theta_l, \quad \text{および} \quad T_c = \frac{1}{2}T_l \tag{22}$$

が得られる。この場合は実際上重要である。

4-9　スピン依存力

いままで2粒子間の相互作用は簡単に距離 r のみの関数 $V(r)$ で与えられると考えてきた。相対論的な取り扱いでは **1-15** で考えたように電子・電子間の相互作用はいろいろな複雑な Dirac 行列によることがあるが，それでも非相対論的近似では，Coulomb ポテンシャルに帰着してしまう。そこで，非相対論的近似でもポテンシャルがスピンによる場合があるだろうか。この答は“Yes”である。その例は中性子と陽子との相互作用によって与えられる。以下にそれを示そう。

さて低いエネルギーでの中性子・陽子の相互作用を考え，S 波のみが重要であると仮定しよう。この二体系の状態は軌道角運動量を $l=0$ と指定し，相対運動量の大きさ k を指定してもまだ決まらない。それは両者がスピンをもつからであって，この系の全スピン角運動量 $\boldsymbol{S}$ を指定しなければならない。$\boldsymbol{S}$ の定義は

$$\boldsymbol{S} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_n + \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_p \tag{1}$$

右辺第一項は中性子のスピン，第二項は陽子のスピンを表わす。これは $\frac{1}{2}$ と $\frac{1}{2}$ との合成であるから，全スピンの可能な値は $S=0$ あるいは1である。ただし

$$\boldsymbol{S}^2 \text{ の固有値} = S(S+1) \tag{2}$$

により S を定義している。この固有状態は直ちに次のように与えられる。

$$S=0 \qquad S_z=0 \qquad \chi_{0,0} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha\beta - \beta\alpha) \tag{3}$$

$$S=1 \begin{cases} S_z=1 & \chi_{1,1} = \alpha\alpha \\ S_z=0 & \chi_{1,0} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha\beta + \beta\alpha) \\ S_z=-1 & \chi_{1,-1} = \beta\beta \end{cases} \tag{4}$$

ただし $\alpha\beta$ は中性子のスピンが上向き，陽子のスピンが下向きの状態を表わす。すなわち一番目の文字が中性子のスピン，二番目の文字が陽子のス

ピンを表わし，α が上向き，β が下向きの状態を表わす。$S=0$ の状態は 1 個，$S=1$ の状態は 3 個あるので，それぞれを**スピン一重状態**(spin singlet state)および**スピン三重状態**(spin triplet state)とよぶ。

そこで問題となるのは，中性子・陽子間の核力はスピン一重状態と三重状態とで同じであろうか，それとも違うであろうかということである。答は次のような議論からわかるように“No”である。

実験的に知られていることは，中性子と陽子との系には重陽子という束縛状態があり，そのスピンは 1 である。重陽子の束縛エネルギーは非常に小さく，S 波の束縛状態と仮定するのが妥当である。したがってそのスピンは，二粒子系の合成した全スピンからくるものと考えなくてはならない。よってその状態は

$$^{3}S_{1} \tag{5}$$

でなければならない。左肩の 3 はスピン三重状態を表わし，右下の 1 は重陽子のスピンを表わす。さてもしポテンシャルがスピンによらないとすれば，スピン一重状態にも同じエネルギー準位に束縛状態があるべきであり，その状態は

$$^{1}S_{0} \tag{6}$$

となるべきである。しかしこのような束縛状態は存在しない。ゆえに核力はスピンに依存する。そして中性子・陽子系で S 波散乱の問題を解くためにはスピン一重状態と三重状態とを区別して考えなければならない。S 波に限らず高い部分波まで考えた場合には次の二つの方程式を別々に解かなければならない。

1）　スピン三重状態

$$\left\{\frac{1}{2\mu}\Delta+E-{}^{3}V(r)\right\}{}^{3}\psi=0 \tag{7}$$

2）　スピン一重状態

$$\left\{\frac{1}{2\mu}\Delta+E-{}^{1}V(r)\right\}{}^{1}\psi=0 \tag{8}$$

ただし ${}^{3}V(r)$ と ${}^{1}V(r)$ とは，それぞれスピン三重状態および一重状態でのポテンシャルであり，別々に考える。そしてそれぞれから散乱振幅を求めたとして，

$${}^{3}f(\theta),\qquad \text{および}\quad {}^{1}f(\theta) \tag{9}$$

と書くことにする。こうすると観測される断面積はおのおのから出るものに適当な重みを乗じて計算される。もし入射粒子も標的粒子も偏極してい

なければ，それぞれの状態の統計的比率は 3 : 1 になるから，このとき微分断面積は

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{3}{4}|{}^3f(\theta)|^2+\frac{1}{4}|{}^1f(\theta)|^2 \tag{10}$$

となる。ここに三重状態と一重状態には干渉項がないことに注意する。それはスピン波動関数が，角変数について積分する以前に直交しているからである。

ここでは簡単のためにスピン 1/2 の陽子と中性子とを考えたが，他のスピンの場合にも同様な注意が必要である。また両者が同種粒子である場合にはもっと注意が必要である。

さて全散乱断面積は(10)を立体角について積分して得られる。

$$\sigma=\frac{3}{4}\int|{}^3f(\theta)|^2d\Omega+\frac{1}{4}\int|{}^1f(\theta)|^2d\Omega \tag{11}$$

実際にスピンに依存するポテンシャルの具体的な形は，r の関数に次のような演算子の乗ぜられたものである。たとえば中性子・陽子の場合には

$$(\boldsymbol{\sigma}_{\rm n}\boldsymbol{\sigma}_{\rm p}),\quad 3\frac{(\boldsymbol{\sigma}_{\rm n}\boldsymbol{r})(\boldsymbol{\sigma}_{\rm p}\boldsymbol{r})}{r^2}-(\boldsymbol{\sigma}_{\rm n}\boldsymbol{\sigma}_{\rm p}),\quad (\boldsymbol{\sigma}_{\rm n}+\boldsymbol{\sigma}_{\rm p})\cdot\boldsymbol{L} \tag{12}$$

この中で二番目のものは**テンソル力**(tensor force)とよばれ，l が 2 だけ異なる軌道角運動量状態を結びつける。中性子・陽子系ではテンソル力の存在のために基底状態は厳密には ${}^3S_1$ ではなくて ${}^3D_1$ が少し混ざり

$${}^3S_1+{}^3D_1 \tag{13}$$

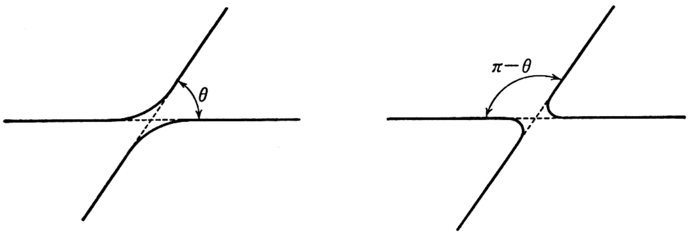
となる。${}^3D_1$ の存在は重陽子の**電気的四重極モーメント**(electric quadrupole moment)の存在を説明するために必要である。また最後の力はスピン状態のみでなく，軌道角運動量にも依存する。そして **spin-orbit coupling(スピン・軌道相互作用)**とよばれる。

4-10 同 種 粒 子

衝突する粒子が**同種粒子**(identical particles)である場合にはいろいろと面倒なことが起きる。それは粒子が **Fermi 統計**に従うか **Bose 統計**に従うかによって，波動関数を反対称化あるいは対称化しなければならないからである。この問題について一般的に論ずるかわりに典型的な例を三つほどあげよう。

例 1. ***α* 粒子同士の弾性散乱**　α 粒子のスピンは 0 であるから Bose

統計に従い[†]，かつ二つの α の間の力にスピン依存性がない。さて弾性散乱過程には，同種粒子間では区別のつかない二つの過程がある。この2過程を 4·4 図(a),(b)で示すが，要するに終状態での2個の粒子を入れかえたものである。



4·4 図　原理的に区別のつかない二つの散乱過程

上に示した二つの過程はもちろん実験では区別がつかないから，理論的に断面積を計算する場合には両者を加えなければならない。古典論ならば両者の断面積を加えればよいが，量子論では振幅，すなわち散乱振幅で加えなければならない。さて図(a)と図(b)との違いは2粒子間の座標の交換にあるから，相対座標を用いて

$$\boldsymbol{r} \longrightarrow -\boldsymbol{r} \tag{1}$$

の変換で結びついている。この変換は極座標で表わせば

$$\theta \longrightarrow \pi-\theta, \qquad \varphi \longrightarrow \varphi+\pi \tag{2}$$

さて(a),(b)の一方，たとえば(a)だけを考えて計算した散乱振幅を $f(\theta)$ とすれば，物理的な振幅は Bose 統計のために

$$f(\theta)+f(\pi-\theta) \tag{3}$$

で与えられることになり，微分断面積は

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=|f(\theta)+f(\pi-\theta)|^2 \tag{4}$$

これは結局，l が偶数の部分波だけ残して振幅を2倍したことに相当する。また全断面積は全立体角について積分すると，同じ状態について2回ずつ数えたことになるから

$$\sigma=\frac{1}{2}\int |f(\theta)+f(\pi-\theta)|^2 d\Omega \tag{5}$$

---

† スピンと統計との間の関係に関する Pauli の定理によれば，整数スピンの粒子は Bose 統計に従い，半整数スピンの粒子は Fermi 統計に従う。

で与えられることになる。

例 2. 陽子・陽子散乱 陽子はスピン 1/2 をもつから Fermi 統計に従い，したがって散乱振幅は2陽子の空間座標およびスピン座標の交換に対して反対称でなければならない。また核力は一般にスピン依存性があることを考慮しておかなければならない。

さてまず2陽子が区別できるとしてスピン三重状態およびスピン一重状態での散乱振幅 ${}^1f(\theta)$, ${}^3f(\theta)$ を計算しなければならない。ところで前節の議論，特に(3)と(4)から明らかなように，二核子系においてはスピン三重状態は対称なスピン波動関数で表わされ，スピン一重状態は反対称なスピン波動関数で表わされる。したがって対応する散乱振幅の角部分は，${}^1f(\theta)$ が対称化され ${}^3f(\theta)$ が反対称化されなければならない。すなわち，スピン一重状態の散乱振幅は

$$ {}^1f(\theta) \longrightarrow {}^1f(\theta)+{}^1f(\pi-\theta) \tag{6} $$

というおきかえを受け，スピン三重状態の散乱振幅は

$$ {}^3f(\theta) \longrightarrow {}^3f(\theta)-{}^3f(\pi-\theta) \tag{7} $$

そして，微分断面積を計算するためには両方のスピン状態の統計的重みを知る必要がある。前節におけると同様に，どちらの陽子も偏極していないとすれば，その重みの比は 3:1 で与えられるから

$$ \frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{1}{4}|{}^1f(\theta)+{}^1f(\pi-\theta)|^2+\frac{3}{4}|{}^3f(\theta)-{}^3f(\pi-\theta)|^2 \tag{8} $$

これから明らかなように，スピン一重状態は l が偶数の場合だけ効き，スピン三重状態は l が奇数の場合だけ効く。すなわち，陽子・陽子散乱が起こりうる状態は

$$ {}^1S,\ {}^3P,\ {}^1D,\ {}^3F,\ \cdots \tag{9} $$

また全断面積は，再び(8)を全立体角につき積分するとすべての状態を2回ずつ数えたことになるから

$$ \sigma=\frac{1}{2}\int\left\{\frac{1}{4}|{}^1f(\theta)+{}^1f(\pi-\theta)|^2+\frac{3}{4}|{}^3f(\theta)-{}^3f(\pi-\theta)|^2\right\}d\Omega \tag{10} $$

例 3. 電子・電子散乱 基本的な考え方は例 2. と全く同じであるが，この場合には非相対論的近似で

$$ {}^1f(\theta)={}^3f(\theta)=-\frac{\mu e^2}{2k^2\sin^2(\theta/2)} \qquad \left(\mu=\frac{m}{2}\right) \tag{11} $$

が知られている。ただしこの場合にはポテンシャルがスピンによらない。この式を(8)に代入すれば直ちに微分断面積が得られる。

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\left(\frac{\mu e^2}{2k^2}\right)^2\left\{\frac{1}{\sin^4(\theta/2)}+\frac{1}{\cos^4(\theta/2)}-\frac{1}{\sin^2(\theta/2)\cos^2(\theta/2)}\right\} \quad (12)$$

これが非相対論的電子・電子散乱の微分断面積を表わす **Mott の公式**である。

4-11　Lippmann-Schwinger 方程式

4-1 の(12)式

$$\psi(\boldsymbol{x})=\psi_{\text{in}}(\boldsymbol{x})+\int d^3x' G(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'\,;\,E)V(\boldsymbol{x}')\psi(\boldsymbol{x}') \quad (1)$$

において G の Fourier 変換が，(17)からわかるように

$$\frac{1}{E-H_0+i\varepsilon} \quad (2)$$

と書けることを考慮すると，(1)は形式的に

$$\Psi=\Phi+\frac{1}{E-H_0+i\varepsilon}V\Psi \qquad (E>0) \quad (3)$$

と書ける。ただし $\Psi=\psi(\boldsymbol{x})$, $\Phi=\psi_{\text{in}}(\boldsymbol{x})$ と書いている。ここに入射波Φは

$$(E-H_0)\Phi=0 \quad (4)$$

のように自由粒子の方程式を満たす。したがって方程式(3)に左から $(E-H_0)$ を乗じると Schrödinger 方程式が得られる。すなわち，

$$(E-H_0)\Psi=V\Psi \quad (5)$$

注意すべきことは，方程式(5)は微分方程式を表わし，方程式(3)はすでに境界条件をとり入れた積分方程式を表わすことであり，$i\varepsilon$ の存在が境界条件を表わすことはすでに 4-1 で見たとおりである。

特に束縛状態 ($E<0$) に対しては $E-H_0$ は負定値の演算子で，一意的に逆演算子が定義できることから

$$\Psi=\frac{1}{E-H_0}V\Psi \quad (6)$$

となり，非同次項Φがなくなっている。方程式(3)および(6)をまとめて，**Lippmann-Schwinger（リップマン-シュヴィンガー）の方程式**とよぶ†。この方程式は問題を具体的に解くのには役にたたないが，形式的に一般的議論をするのに適している。(3)を逐次近似で解くと

† 今後簡単に LS 方程式とよぶ。

$$\Psi=\Phi+\frac{1}{E-H_0+i\varepsilon}V\left(\Phi+\frac{1}{E-H_0+i\varepsilon}V\left(\Phi+\frac{1}{E-H_0+i\varepsilon}V\left(\cdots\right.\right.\right.$$
$$=\left(1+\frac{1}{E-H_0+i\varepsilon}V+\frac{1}{E-H_0+i\varepsilon}V\frac{1}{E-H_0+i\varepsilon}V+\cdots\right)\Phi \quad (7)$$

この形式解の行列要素を具体的に書くと

$$\Psi_i=\sum_f\Phi_f\left\{\delta_{fi}+\frac{1}{E_i-E_f+i\varepsilon}V_{fi}\right.$$
$$\left.+\sum_n\frac{1}{E_i-E_f+i\varepsilon}V_{fn}\frac{1}{E_i-E_n+i\varepsilon}V_{ni}+\cdots\right\} \quad (8)$$

となり，括弧の中は，2-4 で与えた $U(0,-\infty)_{fi}$ の摂動論における公式(20)と一致する。いままで H_0 としては $\boldsymbol{p}^2/2m$ のみを考えてきたが，上の形式はもちろんもっと一般的な場合にも拡張しうることは明らかであろう。さてすでに述べたように分母の $i\varepsilon$ は，散乱波が外向きの球面波，あるいは一般的に **outgoing wave condition** を満たす波になるように自然界に実現される境界条件を満たすようにする役目がある。しかし数学的にはこのほかに $i\varepsilon$ の所の符号を変えて散乱波が内向きの球面波になるような **incoming wave condition** を満たす波も導入した方が便利である。そこで $i\varepsilon$ の前の符号によって2種類の波動関数を作ることにする†。

$$\Psi_a^{(+)}=\Phi_a+\frac{1}{E_a-H_0+i\varepsilon}V\Psi_a^{(+)} \quad \text{outgoing wave condition} \quad (9)$$

$$\Psi_a^{(-)}=\Phi_a+\frac{1}{E_a-H_0+i\varepsilon}V\Psi_a^{(-)} \quad \text{incoming wave condition} \quad (10)$$

さて 2-4 で遷移行列 T を導入した。そこで摂動論の式を Lippmann-Schwinger 形式を用いて書き直してみよう。

$$T_{fi}=V_{fi}+\sum_n\frac{V_{fn}V_{ni}}{E_i-E_n+i\varepsilon}+\cdots$$
$$=\left(\Phi_f,\ V\left(1+\frac{1}{E_i-H_0+i\varepsilon}V+\cdots\right)\Phi_i\right)$$
$$=(\Phi_f,\ V\Psi_i^{(+)}) \quad (11)$$

または $E_f=E_i$ の場合には

$$T_{fi}=\left(\left(1+\frac{1}{E_f-H_0-i\varepsilon}V+\cdots\right)\Phi_f,\ V\Phi_i\right)$$
$$=(\Psi_f^{(-)},\ V\Phi_i) \quad (12)$$

すなわち，$\Psi_i^{(+)}$ を用いても $\Psi_f^{(-)}$ を用いても同様に表わすことができる。

---

† この in, out という名前は混乱して用いられている。場の理論では $\Psi^{(+)}$ を Ψ^{in}, $\Psi^{(-)}$ を Ψ^{out} と書く。

この結果をまとめて書けば，$E_f=E_i$ の場合に

$$T_{fi}=(\Phi_f,\ V\Psi_i^{(+)})=(\Psi_f^{(-)},\ V\Phi_i) \tag{13}$$

が成り立つ。どちらを使うかは問題ごとに決めればよい。

T 行列がわかれば S 行列は直ちに次のように与えられる。

$$\begin{aligned} S_{fi}&=\delta_{fi}-2\pi i\delta(E_f-E_i)T_{fi} \\ &=\delta_{fi}-2\pi i\delta(E_f-E_i)(\Phi_f,\ V\Psi_i^{(+)}) \\ &=\delta_{fi}-2\pi i\delta(E_f-E_i)(\Psi_f^{(-)},\ V\Phi_i) \end{aligned} \tag{14}$$

以上の式が Lippmann-Schwinger 形式における出発点となる。

Chew-Goldberger の形式解 Chew(チュー)と Goldberger(ゴールドバーガー)とは，Lippmann-Schwinger 形式を用いていわゆる impuls(衝撃)近似の研究と関連して次に述べるような形式解を得た。この形式解そのものは方程式を解くのに少しも役だたないが，後に見るようにいろいろな一般的性質を証明するのに役にたつ。

まず LS 方程式の形式解は次のように書ける。

$$\begin{aligned} \Psi_a^{(+)}&=\Phi_a+\frac{1}{E_a-H_0+i\varepsilon}\left(1+V\frac{1}{E_a-H_0+i\varepsilon}+\cdots\right)V\Phi_a \\ &=\Phi_a+\frac{1}{E_a-H_0+i\varepsilon}\left(1-V\frac{1}{E_a-H_0+i\varepsilon}\right)^{-1}V\Phi_a \end{aligned} \tag{15}$$

そこで $A^{-1}B^{-1}=(BA)^{-1}$ という公式を用いると

$$=\Phi_a+\frac{1}{E_a-H+i\varepsilon}V\Phi_a \tag{16}$$

これを **Chew-Goldberger の形式解**とよぶ。ただし $H=H_0+V$ は全ハミルトニアンを表わしている。これを $\Psi^{(+)}$ と $\Psi^{(-)}$ とに対してちゃんと書くと

$$\Psi_a^{(+)}=\Phi_a+\frac{1}{E_a-H+i\varepsilon}V\Phi_a \tag{17}$$

$$\Psi_a^{(-)}=\Phi_a+\frac{1}{E_a-H-i\varepsilon}V\Phi_a \tag{18}$$

この式がどのように使われるかはこの節の後半を見れば明らかになる。

***S* 行列のユニタリー性** S 行列はユニタリーである。このことを証明しよう。S のユニタリー性は

$$S^\dagger S=SS^\dagger=1 \tag{19}$$

で表わされるが，この式をもっと取り扱いやすい形に直しておこう。

$$S_{ba}=\delta_{ba}-2\pi i\delta(E_b-E_a)T_{ba}$$

$$\sum_n (S^\dagger)_{bn}S_{na}=\delta_{ba}$$

の二つの式を組み合わせると，Sのユニタリー性はTを用いて表現される。

$E_b=E_a$ の場合に

$$T^\dagger_{ba}-T_{ba}=2\pi i\sum_n T^\dagger_{bn}\delta(E_b-E_n)T_{na} \tag{20}$$

$$=2\pi i\sum_n T_{bn}\delta(E_b-E_n)T^\dagger_{na} \tag{21}$$

この(20)は(19)の第一の組み合わせに，(21)は(19)の第二の組み合わせに対応する。そこで(19)を証明するには，(20)と(21)とを証明すればよいことになる。まず

$$\begin{aligned}T^\dagger_{ba}&=T^*_{ab}\\&=(\Phi_a,\ V\Psi_b{}^{(+)})^*\\&=(V\Psi_b{}^{(+)},\ \Phi_a)\\&=(\Psi_b{}^{(+)},\ V\Phi_a)\end{aligned} \tag{22}$$

と書くことができる。ゆえに

$$T^\dagger_{ba}-T_{ba}=(\Psi_b{}^{(+)},\ V\Phi_a)-(\Phi_b,\ V\Psi_a{}^{(+)}) \tag{23}$$

ここで $\Psi_a{}^{(+)}$ と $\Psi_b{}^{(+)}$ とに Chew-Goldberger の形式解を代入すると

$$\begin{aligned}T^\dagger_{ba}-T_{ba}&=(\Phi_b,\ V\Phi_a)+\left(\frac{1}{E_b-H+i\varepsilon}V\Phi_b,\ V\Phi_a\right)\\&\quad-(\Phi_b,\ V\Phi_a)-\left(\Phi_b,\ V\frac{1}{E_a-H+i\varepsilon}V\Phi_a\right)\\&=\left(V\Phi_b,\ \left(\frac{1}{E_b-H-i\varepsilon}-\frac{1}{E_b-H+i\varepsilon}\right)V\Phi_a\right)\end{aligned} \tag{24}$$

ただしここで $E_b=E_a$ を使っている。この括弧の中の量を簡単化するために次の公式を使う。

$$\frac{1}{x-i\varepsilon}-\frac{1}{x+i\varepsilon}=2\pi i\delta(x) \tag{25}$$

そうすると

$$T^\dagger_{ba}-T_{ba}=(V\Phi_b,\ 2\pi i\delta(E_b-H)V\Phi_a) \tag{26}$$

次に $\Psi^{(-)}$ は Schrödinger 方程式と境界条件とを組み合わせて得られる解で，完全系をなすと考えてよいから，(26)の演算子の積の間に完全系 $\Psi^{(-)}$ を挿入する†。こうすると $\Psi^{(-)}$ は H の固有状態であるから，H は対応する固有値 E でおきかえられて

$$\begin{aligned}T^\dagger_{ba}-T_{ba}&=\sum_n(V\Phi_b,\ \Psi_n{}^{(-)})2\pi i\delta(E_b-E_n)(\Psi_n{}^{(-)},\ V\Phi_a)\\&=2\pi i\sum_n T^\dagger_{bn}\delta(E_b-E_n)T_{na}\end{aligned} \tag{27}$$

† このほかに $\Psi^{(-)}$ が規格直交系をなすという仮定が入っているが，これについては後に証明する。

となり，これは(20)と一致する。また完全系として $\Psi^{(+)}$ を使うと(21)が得られる。ただしこの式の導出にあたって次の式を使っている。

$$(V\Phi_b, \Psi_n{}^{(-)}) = (\Psi_n{}^{(-)}, V\Phi_b)^* = T^*_{nb}$$

ここではすでに(14)の最後の式を使っている。そして次に

$$T^*_{nb} = T^\dagger_{bn}$$

を用いると，(27)の最後の表式が得られる。これでユニタリー性が証明されたことになる。この証明からわかるように，S 行列のユニタリー性は，$\Psi^{(+)}$ と $\Psi^{(-)}$ とがそれぞれ**完全規格直交系**をなすということと同値である。後にこのことをもっとはっきりと表わす公式を導き出す。

光学定理　$a\to b$ なる遷移が起こる単位時間あたりの確率は，2-4 の(27)で与えられる。すなわち

$$w_{ba} = 2\pi\delta(E_b - E_a)|T_{ba}|^2 \tag{28}$$

いま b としてどんな状態でもよいとすると，

$$w_a = \sum_b w_{ba} = 2\pi\sum_b \delta(E_b - E_a)|T_{ba}|^2 \tag{29}$$

ところでこの右辺をユニタリー性の条件(27)の特別な場合の

$$T^\dagger_{aa} - T_{aa} = 2\pi i\sum_b \delta(E_b - E_a)|T_{ba}|^2$$

と比較してみると，すぐに次式が得られる。

$$T^*_{aa} - T_{aa} = iw_a \tag{30}$$

あるいはもっと簡単に

$$w_a = -2\,\mathrm{Im}\,T_{aa} \tag{31}$$

ところで $a\to$(任意の状態) に対応する断面積 σ_a は，2-4 の(32)より

$$\sigma_a = \frac{V}{v_{\mathrm{rel}}} w_a \tag{32}$$

したがって(31)と(32)とを組み合わせると

$$\sigma_a = -\frac{2V}{v_{\mathrm{rel}}}\,\mathrm{Im}\,T_{aa} \tag{33}$$

この関係式を**光学定理**とよび，一般にどんな場合でも成り立つ†。

例 1. 静的ポテンシャルによる散乱問題における光学定理　すでに 4-2 で述べたポテンシャルによる散乱問題における光学定理を，LS 方程式を用いた形式で見直してみよう。まず波動関数の漸近形は

† σ_a は a から出発したときの全断面積を表わし，弾性散乱のみならず非弾性散乱の断面積をも含み，その意味で 4-2 で紹介した光学定理の一般化になっている。

$$\psi(\boldsymbol{x})\sim\psi_{\rm in}(\boldsymbol{x})-\frac{m}{2\pi}\frac{e^{ikr}}{r}\int d^3x\, e^{-i\boldsymbol{k}_f\boldsymbol{x}}V(\boldsymbol{x})\psi(\boldsymbol{x}) \tag{34}$$

ところで最終的結果はVによらないから $V=1$ と選んでおく。さて(34)の一般形は次のように書ける。

$$\psi(\boldsymbol{x})\sim\psi_{\rm in}(\boldsymbol{x})+\frac{e^{ikr}}{r}f(\theta,\varphi) \tag{35}$$

ただし，(34)と(35)との比較からわかるように

$$\begin{aligned} f(\theta,\varphi)&=-\frac{m}{2\pi}\int d^3x\, e^{-i\boldsymbol{k}_f\boldsymbol{x}}V(\boldsymbol{x})\psi(\boldsymbol{x}) \\ &=-\frac{m}{2\pi}(\Phi_f,\ V\Psi_i^{(+)}) \\ &=-\frac{m}{2\pi}T_{fi} \end{aligned} \tag{36}$$

したがって(28)を $v_{\rm rel}$ で割って得られる微分断面積は

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega_f}&=\frac{2\pi}{v}\int k_f{}^2dk_f\,\delta\left(\frac{k_f{}^2}{2m}-\frac{k^2}{2m}\right)|T_{fi}|^2 \\ &=\left(\frac{m}{2\pi}\right)^2|T_{fi}|^2 \\ &=|f(\theta,\varphi)|^2 \end{aligned}$$

となって 4-2 の結果と一致する。さて散乱断面積は光学定理(33)によると

$$\begin{aligned} \sigma&=-\frac{2}{v}\,{\rm Im}\,T_{aa} \\ &=-\frac{2}{v}\left(-\frac{2\pi}{m}\right){\rm Im}\,f(0) \\ &=\frac{4\pi}{k}\,{\rm Im}\,f(0) \qquad (k=mv) \end{aligned}$$

となって，4-2 の結果と一致する。ただし上の式の導出には，f と T との間に成り立つ関係式(36)を用いている。すなわち，この節で出した光学定理はたしかに 4-2 で出した光学定理より一般的であることがわかる。

定理 $S_{ba}=(\Psi_b{}^{(-)},\ \Psi_a{}^{(+)})$

この定理の意味する所は，S 行列とは一つの完全系を他の完全系に移す変換であるということである。また $\Psi^{(+)}$ と $\Psi^{(-)}$ とがそれぞれ規格直交系をなせば，S 行列に当然ユニタリーということになる。さて証明は $E_b=E_a$ を仮定せずに出発する。初めからこれを仮定しない方が証明しやすいのである。

$$
\begin{aligned}
(\Psi_b{}^{(-)}, \Psi_a{}^{(+)}) &= \left(\Phi_b + \frac{1}{E_b - H - i\varepsilon} V\Phi_b, \Psi_a{}^{(+)}\right) \\
&= (\Phi_b, \Psi_a{}^{(+)}) + \left(\Phi_b, V\frac{1}{E_b - H + i\varepsilon}\Psi_a{}^{(+)}\right) \\
&= (\Phi_b, \Psi_a{}^{(+)}) + \frac{1}{E_b - E_a + i\varepsilon}(\Phi_b, V\Psi_a{}^{(+)}) \\
&= (\Phi_b, \Phi_a) + \left(\Phi_b, \frac{1}{E_a - H_0 + i\varepsilon} V\Psi_a{}^{(+)}\right) \\
&\quad + \frac{1}{E_b - E_a + i\varepsilon}(\Phi_b, V\Psi_a{}^{(+)}) \\
&= \delta_{ba} + \left(\frac{1}{E_a - E_b + i\varepsilon} + \frac{1}{E_b - E_a + i\varepsilon}\right)(\Phi_b, V\Psi_a{}^{(+)}) \\
&= \delta_{ba} - 2\pi i\delta(E_b - E_a)(\Phi_b, V\Psi_a{}^{(+)}) \\
&= S_{ba} \qquad (37)
\end{aligned}
$$

ただしこの証明の途中で(25)の公式を用いた。また上の証明法をそっくりまねして，初めに Chew-Goldberger の形式解を使い，次に LS 方程式自身を使うと，同様にして次の式が証明される。

$$
\begin{aligned}
(\Psi_b{}^{(+)}, \Psi_a{}^{(+)}) &= \delta_{ba} + \left(\frac{1}{E_a - E_b + i\varepsilon} + \frac{1}{E_b - E_a - i\varepsilon}\right)(\Phi_b, V\Psi_a{}^{(+)}) \\
&= \delta_{ba} \qquad (38)
\end{aligned}
$$

この結果は重要である。すなわち，$\Psi^{(+)}$ は規格直交系をなすことを示している†。このことはS行列のユニタリー性の証明で仮定されていたが，ここで初めて証明されたことになる。S行列のユニタリー性の最も論理的証明は，まず(38)を証明し，次に上述の定理を証明すればよい。こうしてS行列は二つの完全規格直交系を結びつける変換であり，したがってユニタリーであるといえる。この節の初めに与えた証明では，実はこのことを仮定していたのである。

また上の定理は場の理論においても重要な役割を果たす。つまりある種の場の理論では，上の定理はむしろS行列の定義として利用されるからである。

漸近形　ポテンシャル散乱の場合に波動関数の**漸近形**は容易に求められたが，LS 方程式の解についてはどうであろうか。漸近形を作るという演算は，2-4 で論じたように $U(0, -\infty)$ を $U(\infty, -\infty)$ でおきかえることであると解釈すると，$\Psi_a{}^{(+)}$ の漸近形は次のようにして作られる。

---

† $\Psi^{(-)}$ に対しても同様なことが成り立つということは言をまたない。

$$\Psi_a^{(+)} \sim S\Phi_a$$
$$= \Phi_a - 2\pi i \delta(E_a - H_0) V \Psi_a^{(+)} \tag{39}$$

さてこの漸近形を $\Psi_a^{(+)}$ 自身の形

$$\Psi_a^{(+)} = \Phi_a + \frac{1}{E_a - H_0 + i\varepsilon} V \Psi_a^{(+)}$$

と比較すると，$\Psi_a^{(+)}$ の漸近形は

$$\frac{1}{E_a - H_0 + i\varepsilon} \longrightarrow -2\pi i \delta(E_a - H_0) \tag{40}$$

というおきかえにより得られることがわかる。あるいは閉じた形に書くと

$$\Psi_a^{(+)} \sim \Phi_a - 2\pi i \delta(E_a - H_0) \{(E_a - H_0) \Psi_a^{(+)}\} \tag{41}$$

ただし $(E_a - H_0)$ はまず $\Psi_a^{(+)}$ に乗じて，その後に $\delta(E_a - H_0)$ を乗ずるものとする。$\delta(E_a - H_0)$ と $(E_a - H_0)$ との積を先に作ると消えてしまうからである。

また容易にわかるように，(39)または(41)に $(E_a - H_0)$ を乗ずると消える。

$$(E_a - H_0) S\Phi_a = 0 \tag{42}$$

すなわち，漸近形は自由粒子の方程式を満たす。

以上述べたような特徴はそのまま場の理論に拡張することができる。上に述べた(41)のおきかえと本質的に同じ演算が，Lehmann(レーマン)，Symanzik(ジマンチック)，および Zimmermann(チンメルマン)により公理論的場の理論における**漸近条件**(asymptotic condition)の定式化に利用された。次節に述べるように，この方法が威力を発揮するのは組み替え反応においてである。

4-12 組み替え反応の理論

いままでに展開された Lippmann-Schwinger の形式論が最も威力を発揮するのは**組み替え反応**(rearrangement collision)の場合である。いままで全ハミルトニアン H を，自由な部分 H_0 と相互作用の部分 V とに分けたが，この分け方は束縛状態があると一意的ではなくなる。特に初期状態と終状態とで分け方が異なるような反応が組み替え反応である。このことを具体例によって説明する。

中性子と重陽子とが衝突して重陽子が中性子と陽子とに分かれる反応を考えてみよう。

$$\mathrm{n+d \longrightarrow n+n'+p} \tag{1}$$

この場合全ハミルトニアンは

$$H=T_\mathrm{p}+T_\mathrm{n}+T_\mathrm{n'}+V_\mathrm{np}+V_\mathrm{n'p}+V_\mathrm{nn'} \tag{2}$$

ただしTは運動のエネルギー，Vは2体間のポテンシャルを表わす。さて(1)の反応を記述するのに，初期状態での H の分解は

$$H_0=T_\mathrm{p}+T_\mathrm{n}+T_\mathrm{n'}+V_\mathrm{n'p} \tag{3}$$

$$V=V_\mathrm{np}+V_\mathrm{nn'} \tag{4}$$

ここで $V_\mathrm{n'p}$ を H_0 に入れたのは，この項がないと重陽子ができないからである。それに反して，終状態での分解は

$$H_0'=T_\mathrm{p}+T_\mathrm{n}+T_\mathrm{n'} \tag{5}$$

$$V'=V_\mathrm{np}+V_\mathrm{nn'}+V_\mathrm{n'p} \tag{6}$$

このように一般に H_0 とV への分解が，初期状態と終状態とで異なる組み替え反応を議論するために，H に2通りの分解を導入する。

$$H=\underset{\text{初期状態}}{H_a+V_a}=\underset{\text{終状態}}{H_b+V_b} \tag{7}$$

ただし H_a と H_b とは，それぞれの初期状態および終状態における自由なハミルトニアンである。したがって，それぞれの状態に対する自由な状態ベクトルは

$$(H_a-E_a)\Phi_a=(H_b-E_b)\Phi_b=0 \tag{8}$$

という方程式を満たす。$a\rightarrow b$ の遷移が可能であるためには，エネルギー保存則により

$$E_a=E_b \tag{9}$$

が成り立っていなければならない。さてこれから議論しなければならないことは $a\rightarrow b$ に対応する確率振幅をどうやって計算したらよいかという問題である。

そのためには Φ_a から出発して一般的な散乱問題を解き，それから前節の最後に議論された方法により，終状態に対応する漸近形を作らなければならない。さて Φ_a から出発して outgoing wave condition を満たす解を形式的に求めると

$$\Psi_a^{(+)}=\Phi_a+\frac{1}{E_a-H+i\varepsilon}V_a\Phi_a \tag{10}$$

さて終状態に対応する漸近形を作るために

$$\frac{1}{A}-\frac{1}{B}=\frac{1}{B}(B-A)\frac{1}{A}$$

という公式を用いると

$$\frac{1}{E_a-H+i\varepsilon}-\frac{1}{E_a-H_b+i\varepsilon}=\frac{1}{E_a-H_b+i\varepsilon}V_b\frac{1}{E_a-H+i\varepsilon} \tag{11}$$

この変形を(10)に代入すると

$$\Psi_a{}^{(+)}=\Phi_a+\frac{1}{E_a-H_b+i\varepsilon}\left(1+V_b\frac{1}{E_a-H+i\varepsilon}\right)V_a\Phi_a \tag{12}$$

さて第一項は入射波そのものであり，問題の遷移と関係ないから，第二項に対して前節で述べた次のおきかえをする。

$$\frac{1}{E_a-H_b+i\varepsilon}\longrightarrow -2\pi i\delta(E_a-H_b) \qquad (\text{ただし } E_a=E_b) \tag{13}$$

そうすると遷移振幅 T_{ba} は，(12)に対して(13)のおきかえをしたものと Φ_b との積で与えられるから

$$\begin{aligned}T_{ba}&=\left(\Phi_b,\left(1+V_b\frac{1}{E_a-H+i\varepsilon}\right)V_a\Phi_a\right)\\&=\left(\left(1+\frac{1}{E_b-H+i\varepsilon}V_b\right)\Phi_b,\ V_a\Phi_a\right)\\&=(\Psi_b{}^{(-)},\ V_a\Phi_a)\end{aligned} \tag{14}$$

ところが前節で述べたのと同様に T_{ba} には2通りの表現法がある。

$$\begin{aligned}T_{ba}&=(\Psi_b{}^{(-)},\ V_a\Phi_a)\\&=(\Phi_b,\ V_b\Psi_a{}^{(+)})\end{aligned} \tag{15}$$

そこで両者が等しいことを証明するために，その差をとってそれが0になることを示そう。Chew-Goldberger の形式解を用いて

$$\begin{aligned}&(\Psi_b{}^{(-)},\ V_a\Phi_a)-(\Phi_b,\ V_b\Psi_a{}^{(+)})\\&=(\Phi_b,\ V_a\Phi_a)-(\Phi_b,\ V_b\Phi_a)\\&\quad+\left(\Phi_b,\ V_b\frac{1}{E-H+i\varepsilon}V_a\Phi_a\right)-\left(\Phi_b,\ V_b\frac{1}{E-H+i\varepsilon}V_a\Phi_a\right)\end{aligned}$$

ただし $E=E_a=E_b$ である。第二行はちょうど打ち消し合って消えてしまうから

$$\begin{aligned}&=(\Phi_b,\ (V_a-V_b)\Phi_a)\\&=(\Phi_b,\ (H_b-H_a)\Phi_a)\\&=(E_b-E_a)(\Phi_b,\ \Phi_a)\\&=0\end{aligned} \tag{16}$$

ゆえに

$$T_{ba}=(\Psi_b{}^{(-)},\ V_a\Phi_a)=(\Phi_b,\ V_b\Psi_a{}^{(+)}) \tag{17}$$

ここで注意すべきことは，(17)においては一つの表現では V_a，他の表現

では V_b が出ていることである。ところで Born 近似では T_{ba} は

$$(\Phi_b,\ V_a\Phi_a)=(\Phi_b,\ V_b\Phi_a)$$

で与えられるが，このときには V_a, V_b のどれを用いても等しい。また(16)の証明を一般化して，$E_a=E_b$ の場合に $(E_b-E_a)(\Phi_b,\ \Psi_a{}^{(+)})=0$ としてはいけない。この理由については章末にある演習問題を参照のこと。

終状態における相互作用の効果　応用として終状態における相互作用の効果について述べておこう。ハミルトニアンを次の3部分に分ける。

$$H=H_0+U+V \tag{18}$$

そして U と V とについて次のような条件を課する。

1)　U は強く，V は弱い。

2)　H_0+U に対して厳密解が知られている。

$$(H_0+U)\chi_a{}^{(\pm)}=E_a\chi_a{}^{(\pm)} \tag{19}$$

たとえば電子と電磁場の系に対して

$$\begin{aligned} H_0&=(\text{電子})+(\text{自由な電磁場})\\ U&=(\text{Coulomb ポテンシャル})\\ V&=(\text{電子と電磁場との相互作用}) \end{aligned} \tag{20}$$

また H の固有状態は Ψ で表わす。すなわち

$$H\Psi_a{}^{(\pm)}=E_a\Psi_a{}^{(\pm)} \tag{21}$$

そうすると，Ψ と χ との関係は

$$\begin{aligned} \Psi_a{}^{(\pm)}&=\chi_a{}^{(\pm)}+\frac{1}{E_a-H\pm i\varepsilon}V\chi_a{}^{(\pm)}\\ &=\chi_a{}^{(\pm)}+\frac{1}{E_a-(H_0+U)\pm i\varepsilon}V\Psi_a{}^{(\pm)} \end{aligned} \tag{22}$$

(20)のハミルトニアンを用いる例として光電効果を考えてみよう。そして

$$S_{ba}=(\Psi_b{}^{(-)},\ \Psi_a{}^{(+)})$$

から V について1次の項を拾い出してみよう。

$$\begin{aligned} (\Psi_b{}^{(-)},\ \Psi_a{}^{(+)})&=(\chi_b{}^{(-)},\ \chi_a{}^{(+)})\\ &\quad+\left(\chi_b{}^{(-)},\ \frac{1}{E_a-(H_0+U)+i\varepsilon}V\chi_a{}^{(+)}\right)\\ &\quad+\left(\frac{1}{E_b-(H_0+U)-i\varepsilon}V\chi_b{}^{(-)},\ \chi_a{}^{(+)}\right)\\ &\quad+\cdots \end{aligned} \tag{23}$$

ただしいま問題にしている過程では次のように χ を選ぶ。

$$\chi_a{}^{(+)}:(1s\ \text{電子})\times(1\ \text{光子状態})$$

$$\chi_b{}^{(-)}:(\text{散乱状態の電子})\times(0\ \text{光子状態})$$

このような二つの状態を考えれば

$$(\chi_b^{(-)}, \chi_a^{(+)})=0 \tag{24}$$

となるから，(23)の第一項は消えてしまう。そこでVについて1次の項までを残せば，S_{ba} は次の式で与えられる。

$$\begin{aligned} S_{ba} &= \left(\frac{1}{E_a-E_b+i\varepsilon}+\frac{1}{E_b-E_a+i\varepsilon}\right)(\chi_b^{(-)}, V\chi_a^{(+)}) \\ &= -2\pi i\delta(E_a-E_b)(\chi_b^{(-)}, V\chi_a^{(+)}) \end{aligned} \tag{25}$$

ここにVは光子を消す演算子を含んでいる。したがってこの問題では

$$T_{ba}=(\chi_b^{(-)}, V\chi_a^{(+)}) \tag{26}$$

この公式の特徴は $\chi^{(+)}$ と $\chi^{(-)}$ とが両方出てくることである。ただしこの問題では χ_a は束縛状態を表わすから

$$\chi_a^{(+)}=\chi_b^{(-)} \tag{27}$$

となる。また 3-3 の光電効果の計算では $\chi_b^{(-)}$ のかわりに

$$H_0\Phi_b=E_b\Phi_b$$

を満たす Born 近似の Φ_b を使っている。ただし Φ_b と $\chi_b^{(-)}$ との関係は

$$\chi_b^{(-)}=\Phi_b+\frac{1}{E_b-H_0-i\varepsilon}U\chi_b^{(-)}=\Phi_b+\frac{1}{E_b-(H_0+U)-i\varepsilon}U\Phi_b \tag{28}$$

で与えられる。すなわち(26)の Born 近似は $(\Phi_b, V\chi_a)$ で与えられる。

この過程に似た問題に重陽子の光分解がある。

$$\gamma+\mathrm{d}\longrightarrow \mathrm{p}+\mathrm{n} \tag{29}$$

この問題については Bethe による取り扱いがあるが，この過程は初等的な原子核の教科書に詳しく論ぜられているので，ここではもう少し変わった過程について論じてみよう†。

例 1. 陽子・陽子衝突におけるパイ中間子の創生 4-6 において散乱状態と束縛状態との関係を調べた。この方法をさらに拡張して次の2種類の反応の間の関係を調べることができる。

$$\mathrm{p}+\mathrm{p} \begin{cases} \nearrow \mathrm{p}+\mathrm{n}+\pi^+ & (30) \\ \searrow \mathrm{d}\quad +\pi^+ & (31) \end{cases}$$

この問題を解くのにやはり上述の理論形式を用いる。以下の取り扱いは Watson による。この場合に，U を核子間のポテンシャルとし，Vを核子とパイ中間子との相互作用，特にパイ中間子を創り出すのに必要な相互作用とする。このような分離は近似的にしかできないが，ここではそのこと

† たとえば，H. A. Bethe and P. Morrison: *Elementary Nuclear Theory* (2nd ed.) (John Wiley & Sons, New York, 1956). 特に第12章を参照。

は問題としない。ここで U が V よりも強いとすると上述の形式が使えることになる。初期状態の状態ベクトル $\chi_{\mathrm{pp}}^{(+)}$ は次の LS 方程式を満たす。

$$\chi_{\mathrm{pp}}^{(+)}=\Phi_{\mathrm{pp}}+\frac{1}{E_a-H_a+i\varepsilon}U_{\mathrm{pp}}\chi_{\mathrm{pp}}^{(+)} \tag{32}$$

ただし H_a は二核子系の運動エネルギーを表わし，U_{pp} は V_a に相当し，この場合2陽子間のポテンシャルを表わす。また E_a は初期状態でのエネルギーを表わす。これに対して終状態の状態ベクトルは

$$\chi_{\mathrm{pn}\pi^+}^{(-)}=\Phi_{\mathrm{pn}\pi^+}+\frac{1}{E_a-H_b-i\varepsilon}V_b\chi_{\mathrm{pn}\pi^+}^{(-)} \tag{33}$$

ただし H_b は p, n, π^+ のそれぞれの運動エネルギーと π^+ の静止質量に対応するエネルギーとの和を表わし，V_b は 3 粒子間の相互作用であるが，ここではパイ中間子と核子との相互作用は弱いと仮定し，V_b を U_{pn} で近似すると $\chi^{(-)}$ は近似的に次のように分離する。

$$\chi_{\mathrm{pn}\pi^+}^{(-)}\approx g_{\mathrm{pn}}^{(-)}\cdot h_\pi \tag{34}$$

ただし $g_{\mathrm{pn}}^{(-)}$ は pn 系の，h_π はパイ中間子の状態ベクトルを表わす。さて $g_{\mathrm{pn}}^{(-)}$ は次の LS 方程式を満たす。

$$g_{\mathrm{pn}}^{(-)}=g_{\mathrm{pn}}^{(0)}+\frac{1}{E_{\mathrm{p}}+E_{\mathrm{n}}-H_{\mathrm{p}}-H_{\mathrm{n}}-i\varepsilon}U_{\mathrm{pn}}g_{\mathrm{pn}}^{(-)} \tag{35}$$

ここに H_{p} と H_{n} とはそれぞれ陽子および中性子の運動エネルギーの演算子で，E_{p} と E_{n} とはその固有値を表わす。次に全運動量と相対運動量の $\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{q}$ とを導入する。

$$\boldsymbol{p}=\boldsymbol{k}_{\mathrm{p}}+\boldsymbol{k}_{\mathrm{n}},\qquad \boldsymbol{q}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{k}_{\mathrm{p}}-\boldsymbol{k}_{\mathrm{n}}) \tag{36}$$

ただし $\boldsymbol{k}_{\mathrm{p}}$ と $\boldsymbol{k}_{\mathrm{n}}$ とはそれぞれ陽子と中性子との運動量を表わしている。さて以下の議論は $q=|\boldsymbol{q}|$ が非常に小さいときに限ることにしよう。まず

$$\begin{aligned}T_{ba}&=(\chi_b{}^{(-)},\ V\chi_a{}^{(+)})\\&\approx(g_{\mathrm{pn}}^{(-)}\cdot h_\pi,\ V\chi_{\mathrm{pp}}^{(+)})\end{aligned} \tag{37}$$

さて T の q 依存性を考えてみよう。それは $g_{\mathrm{pn}}^{(-)}$ のみを通して生ずることがわかる。たとえば π^+ 創生ぎりぎりの threshold energy のちょっと上を考えると，π^+ は核子よりずっと軽いので重心系で考えれば

$$|\boldsymbol{k}_\pi|=|\boldsymbol{p}|\gg|\boldsymbol{q}| \tag{38}$$

が成り立つから，終状態でのエネルギーは

$$E_b=\mu+\frac{\boldsymbol{k}_\pi{}^2}{2\mu}+\frac{\boldsymbol{k}_{\mathrm{p}}{}^2}{2M}+\frac{\boldsymbol{k}_{\mathrm{n}}{}^2}{2M}$$

$$=\mu+\frac{\boldsymbol{k}_\pi{}^2}{2\mu}+\frac{\boldsymbol{p}^2}{4M}+\frac{\boldsymbol{q}^2}{M}$$

$$\approx\mu+\frac{\boldsymbol{k}_\pi{}^2}{2\mu}+\frac{\boldsymbol{p}^2}{4M} \tag{39}$$

すなわち，q の値は非常に小さい限り最終エネルギーにほとんど寄与しないことになる。そこで次の量を考えてみよう。

$$R(\boldsymbol{r})=(h_\pi,\ V(\boldsymbol{r})\chi_{\rm pp}^{(+)}) \tag{40}$$

ただし $\boldsymbol{r}$ は陽子・中性子間の相対座標であり，陽子・中性子系の波動関数のような量である。ここでたいせつなことは $R(\boldsymbol{r})$ が $\boldsymbol{q}$ にほとんどよらないということである。そうすると

$$T_{ba}\approx\int g_{\boldsymbol{q}}^{(-)}(\boldsymbol{r})R(\boldsymbol{r})d^3r \tag{41}$$

これは(37)と(40)とを組み合わせれば明らかである。ただし $g_{\boldsymbol{q}}^{(-)}(\boldsymbol{r})$ は陽子・中性子の相対運動量が $\boldsymbol{q}$ のときの波動関数であり，前に $g_{\rm pn}^{(-)}(\boldsymbol{r})$ と書いたものである。

次に π^+ は半径 R_0 の小さな領域でしか創られないとする。ただし R_0 の大きさとしては 10^{-13} cm の程度であるとする。そうすると $r>R_0$ に対しては $R(\boldsymbol{r})\sim 0$ となり，重要な量は r が小さい所での $g_{\boldsymbol{q}}^{(-)}(\boldsymbol{r})$ である。$q\ll\mu$ で q が十分小さいとすると，$g_{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{r})$ の中で S 波のみが重要である。そこで S 波のみをとると $g_{\boldsymbol{q}}^{(-)}(\boldsymbol{r})$ の漸近形は次式で与えられる。

$$g_{\boldsymbol{q}}^{(-)}(\boldsymbol{r})\sim\frac{e^{-i\delta}}{qr}\sin(qr+\delta) \tag{42}$$

この波動関数の位相を定めるには，付録で議論される時間反転の理論を使えばよい。ところが上に述べたように大事なのは r が小さい所での波動関数の形である。$g_{\boldsymbol{q}}^{(-)}(r)$ を r の小さい所へ外挿するよい近似式は Bethe により与えられている。その形は

$$g_{\boldsymbol{q}}^{(-)}(\boldsymbol{r})\sim\frac{e^{-i\delta}}{qr}\sin\delta\cdot\left(1-\frac{r}{a}\right) \tag{43}$$

ただし a は 4-5 で導入した scattering length である。また，S 状態には $^1S_0$ と $^3S_1$ と両方の状態があるので，どちらの状態が効くかを知らなければならない。それには π^+ のスピンは 0，パリティは奇であることを用い，全角運動量の保存，パリティの保存，q が小さく π^+ は陽子・中性子系に対して P 波で出ること† を考慮すると次のような状態で起こることが

† これはパイ中間子の相互作用の性質である。

証明される。

$$\underset{{}^1S_0}{\mathrm{p}+\mathrm{p}} \longrightarrow \underbrace{\underbrace{\mathrm{p}+\mathrm{n}}_{{}^3S_1}+\pi^+}_{P} \tag{44}$$

結局これは全角運動量 $J=0$, パリティ偶の状態である。したがって陽子・中性子系は ${}^3S_1$ 状態にあり, a はこの状態での scattering length をとらなければならない。

さて δ と qr とが1に比べて非常に小さければ†, effective range formula を簡単化した $\delta\approx -qa$ を用いて(42)が(43)と一致することが示せる。

$$\begin{aligned}\sin(qr+\delta)&\approx\delta+qr\\&\approx\delta-\frac{\delta}{a}r\\&=\delta\left(1-\frac{r}{a}\right)\\&\approx\sin\delta\cdot\left(1-\frac{r}{a}\right)\end{aligned} \tag{45}$$

この式は本質的には運動エネルギーが 0 のときの波動関数の漸近形である。この式は $r=0$ で消えないが, r が非常に小さい所ではポテンシャルが深いので波動関数の形が q によらないから, r が小さすぎる所の形はたいせつでない。結局核力の有効距離の近傍が一番重要である。そこで上の Bethe の式(43)を(41)に代入すると

$$T_{ba}\approx\frac{e^{-i\delta}}{q}\sin\delta\int(f(r),\,R(r))d^3r \tag{46}$$

ただし $f(r)$ は運動エネルギーが0のときの波動関数でその漸近形は

$$f(r)\sim\frac{1-\alpha r}{r}\qquad\left(\alpha=\frac{1}{a}\right) \tag{47}$$

また r のもっと小さい所での $f(r)$ は次の方程式で決められる。

$$-\frac{1}{M}\{rf(r)\}''+U_{\mathrm{pn}}(r)\{rf(r)\}=0 \tag{48}$$

しかしここで重要なのは $f(r)$ の形ではなくて, (46)の q 依存性は全部積分の外の因子に含まれているということである。

したがって上の過程の断面積を計算すると††

---

† q が小さく, r は核力の到達距離の程度であるとする。

†† $V=1$ と規格化し, 運動量保存は T の中に入っているとする。すなわち T は運動量の δ 関数を含むとする。

$$\sigma(\mathrm{p}+\mathrm{p}\to\mathrm{p}+\mathrm{n}+\pi^+)=\frac{2\pi}{v_{\mathrm{rel}}}\int\delta\left(E_a-\frac{\boldsymbol{k}_\pi{}^2}{2\mu}-\frac{\boldsymbol{p}^2}{4M}\right)|T_{ba}|^2 \times\frac{d^3k_\pi}{(2\pi)^3}\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{d^3q}{(2\pi)^3} \tag{49}$$

これから断面積の q 依存性は

$$\frac{d\sigma}{dq}\propto\sin^2\delta=\frac{q^2}{\alpha^2+q^2} \tag{50}$$

ただし $q\cot\delta=-\alpha$ という低エネルギーでの近似を用いている。もちろん effective range r_0 をここで入れることはできるが，そのためには Bethe の近似(43)が簡単すぎて r_0 を入れるように拡張しにくいので，むしろ r_0 を含む項を全部省略した。

重陽子創生過程　次に(31)に対応して重陽子ができる過程を考えて，その断面積と上の式とを比べてみよう。終状態で重陽子ができやすいことは，(44)で終状態での陽子と中性子とが $^3S_1$ 状態にあることから容易に想像されるであろう。両方の過程の関係を見つける鍵は，低いエネルギーでは散乱状態の波動関数も束縛状態の波動関数も，r が核力の到達距離付近では運動エネルギーが0のときの波動関数で近似できる点にある。

まず T_{ba} を計算するためには，(41)において

$$g_{\boldsymbol{q}}^{(-)}(r)\longrightarrow g_{\mathrm{D}}(r) \tag{51}$$

というおきかえをしなければならない。ただし $g_{\mathrm{D}}(r)$ は重陽子の波動関数である。その漸近形はすでに知ったように

$$g_{\mathrm{D}}(r)\sim C\frac{e^{-\gamma r}}{r} \tag{52}$$

r が小さい所では $g_{\mathrm{D}}(r)$ を運動エネルギーが0のときの波動関数 $f(r)$ でおきかえる。

$$g_{\mathrm{D}}(r)\approx N_{\mathrm{D}}f(r)=N_{\mathrm{D}}\frac{1-\alpha r}{r}\sim N_{\mathrm{D}}\frac{e^{-\alpha r}}{r} \tag{53}$$

(52)と(53)とを核力の到達距離の近傍で比べると

$$\alpha=\gamma,\qquad N_{\mathrm{D}}=C \tag{54}$$

したがって(31)の過程に対応する遷移振幅は

$$T_{ba}(\mathrm{deuteron})\approx N_{\mathrm{D}}\int(f(r),\,R(r))d^3r =C\int(f(r),\,R(r))d^3r \tag{55}$$

すなわち，この積分の値自身はわからなくても次の比はわかることになる。

$$\frac{T_{ba}(\mathrm{pn})}{T_{ba}(\mathrm{deuteron})} \tag{56}$$

そこで陽子と中性子とが出る場合の微分断面積を次の形に書くとする。

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dT}=\frac{\sqrt{2}}{\pi}\left(\frac{M}{\mu}\right)^{3/2}T^{3/2}(T_0-T)^{1/2}\frac{\sin^2\delta}{q^2}G \qquad (\text{重心系}) \tag{57}$$

ただし T は π^+ の運動のエネルギー，T_0 はその極大値，Ω は π^+ の方向に対する立体角であり，G は q にはよらないが π^+ の運動量の方向にはよる。またこの式を(49)から出すにあたっては，(44)に示されたように π^+ は P 状態に出ているので，次のような p 依存性を仮定している。

$$\int (f(r),\ R(r))d^3r \propto p \tag{58}$$

この p 依存性を仮定して(49)の積分を実行し，(57)を出したのである。

次に重陽子が出るときの断面積を計算すると

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{\gamma(p/\mu)^3}{1-r_0\gamma}G \tag{59}$$

ただし $(1-r_0\gamma)$ は 4-6 で示されたように重陽子の波動関数の規格化から出る。そこで(57)と(59)との比をとると G が消去され，その結果を実験と比較することができる。理論と実験との一致はよい。

演習問題 4.

1. 半径 a の剛体球ポテンシャルに対して，一般の部分波の位相のずれ δ_l を求めよ。

2. 高さ V_0 で半径 a の箱型ポテンシャルによる S 波散乱の位相のずれを δ としたときに，厳密解より次式を得る。

$$\lim_{k\to 0} k\cot\delta=\frac{1}{a}\,\frac{(a\sqrt{-V_0})\cot(a\sqrt{-V_0})}{1-(a\sqrt{-V_0})\cot(a\sqrt{-V_0})}$$

この結果を Fredholm 理論による公式

$$k\cot\delta=ik\frac{\Delta(-k)+\Delta(k)}{\Delta(-k)-\Delta(k)}$$

と比較せよ。ただし $\Delta(k)$ は V_0 につき2次まで計算せよ。

3. 重陽子は $^3S_1$ と $^3D_1$ との混ざった状態である。ポテンシャルが

$$V(r)=V_a(r)+V_b(r)(\boldsymbol{\sigma}_\mathrm{n}\boldsymbol{\sigma}_\mathrm{p})+V_c(r)\left(3\frac{(\boldsymbol{\sigma}_\mathrm{n}\boldsymbol{r})(\boldsymbol{\sigma}_\mathrm{p}\boldsymbol{r})}{r^2}-(\boldsymbol{\sigma}_\mathrm{n}\boldsymbol{\sigma}_\mathrm{p})\right)$$

で与えられる場合に，重陽子の波動関数の動径部分に対する方程式を求めよ。

4. 次の形式的証明の誤りを正せ。

$$T_{ba}=(\Phi_b,\ V\Psi_a^{(+)})=(\Phi_b,\ (H-H_0)\Psi_a^{(+)})=(E_a-E_b)(\Phi_b,\ \Psi_a^{(+)})$$

ゆえに $E_a=E_b$ のときには　　　$T_{ba}=0$

付　録†

A.　時間反転

量子力学においては，通常多くの場合に理論の枠組がある種の連続的変換，および反転演算に対して不変になっている。特に反転演算の例としては，空間反転，時間反転，荷電共役などが典型的なものである。空間反転に対して理論が不変であるときにはパリティという保存量が現われることは初等的量子力学の教えるところである。また荷電共役は場の量子論においてはじめて厳密に定義される変換である。そこで本書では時間反転について論ずることにする。この変換は他の二つの変換と異なり，ユニタリー変換では表わせず，また古典論においてすでに知られているという二つの大きな特徴がある。

A-1　時間反転に対して可逆な系

まず時間反転に対して**可逆な系**と**非可逆な系**とを分類しなければならない。可逆な系とは直観的に表現するならば，ある現象を撮影してそのフィルムを逆回しに映写した際，スクリーン(願わくば3次元)に映る現象が元の系の運動方程式と矛盾しないものである。もちろんこの表現は，3次元の現象を2次元の映写幕に写像しなければならないという欠点があるが，大ざっぱな感じはこれでわかると思う。また非可逆な系とは上に述べた条件を満たしていない系のことをさす。

マクロの現象ではすべての変数を測定できないから，結局ある種の平均値のみを測定していることになるので，この種の判定を適用することがあ

† この付録の内容については，K. Nishijima: *Fundamental Particles*(W.A. Benjamin, New York, 1963).

まり適当でない。ここでは系の力学変数の数が限られているミクロの現象のみを議論の対象として選ぶことにする。また上の定義は直観的だが厳密ではないので，もっと数学的に厳密な定義を与えることにする。

定義　ある力学系の状態を完全に指定する力学変数の組をSとする。さてこの系がある時刻にS_iという状態にあり，時間Tだけ経過してS_fという状態になったとする。このことを次の記号で表わすことにする。

$$S_i \xrightarrow{T} S_f \qquad (1)$$

いまSに対して写像Rが存在して次の条件が満たされているとする。

$$S_f{}^R \xrightarrow{T} S_i{}^R \qquad (2)$$

ただしS^RはSのR写像を表わす。このような写像Rが任意のSに対して存在するときにこの系は時間反転に対して可逆であるという。またこのような写像が存在しない系は，時間反転に対して非可逆であるという。

上の定義に対して種々の補足が必要である。まずSとは何かということである。古典力学においては，x_1，x_2，$\cdots$，p_1，p_2，$\cdots$という正準変数の組をとればよい。したがってSは**位相空間**の中の一点で表わされ，Rは位相空間をそれ自身に移す写像である。量子力学では，Sは**状態ベクトル**を表わすと考えられる。ただし位相の異なるものもまとめて同じSで表わされるとする(いわゆる ray)。そうすると，Rは Hilbert 空間内の ray を他の ray に移す変換である。

次に重要な点は，上の定義では時間Tのみを指定し，どの時刻から出発するかを指定していない点である。このことは時間の均一性を要求し，したがってラグランジアンが存在すれば Noether(ネター)の定理によりエネルギーが保存しなければならないことを意味する。

さて上の定義に基づいて時間反転の性質をいろいろと議論してみよう。

A-2　古典力学

上の定義からいろいろなことを導くには，演算Rに対して付加的な仮定が必要である。古典力学の範囲内では次の仮定は妥当であろう。

a)　力学変数$A, B, \cdots$の関数$F(A, B, \cdots)$に対して，演算Rは次のように定義される。

$$F(A, B, \cdots)^R = F(A^R, B^R, \cdots) \qquad (3)$$

b)　ハミルトニアンおよび位置座標はRに対して不変である。

$$H^R = H, \qquad \boldsymbol{x}^R = \boldsymbol{x} \tag{4}$$

c) 力学変数でない物理定数，たとえば質量とか荷電等は演算Rによって変えられない。

これらの補足的仮定は，演算Rが位相空間内での写像であることを考えればもっともらしいであろう。またbはフィルムの逆回しを考えればうなずける。

さて以上の補足的仮定の下にいろいろの定理を証明しよう。

定理 1. Qが任意の力学変数あるいはその関数を表わす場合に

$$(Q, H)^R + (Q^R, H) = 0 \tag{5}$$

ただし括弧は Poisson 括弧を表わし，次式で定義される。

$$(u, v) = \sum_r \left(\frac{\partial u}{\partial q_r} \cdot \frac{\partial v}{\partial p_r} - \frac{\partial u}{\partial p_r} \cdot \frac{\partial v}{\partial q_r} \right) \tag{6}$$

（証明） この定理は可逆性の定義そのものであることが証明からわかる。古典力学における公式

$$\frac{dQ}{dt} = (Q, H) \tag{7}$$

を用いれば，可逆性の条件は次のように書ける。ただし時間Tとして無限小の時間 dt を用いている。

$$Q \xrightarrow{dt} Q + (Q, H)dt \equiv Q' \tag{8}$$

$$Q'^R \xrightarrow{dt} Q^R \tag{9}$$

そこで(8)を知って，実際に(9)の右辺を計算してみると

$$\begin{aligned} Q'^R \xrightarrow{dt} & Q'^R + (Q'^R, H)dt \\ &= Q^R + (Q, H)^R dt + (Q'^R, H)dt \\ &= Q^R + \{(Q, H)^R + (Q^R, H)\} dt + O(dt^2) \end{aligned} \tag{10}$$

ここで(9)の右辺と比べると，括弧の中の量が消えなければならないから

$$(Q, H)^R + (Q^R, H) = 0$$

これで(5)が可逆性のための必要条件であることがわかった。

定理 2. $\boldsymbol{p}$を運動量としたとき

$$\boldsymbol{p}^R = -\boldsymbol{p} \tag{11}$$

（証明） これはフィルムの逆回しから当然予想されることであるが，上述の a), b), c) の仮定から証明することのできる事柄である。さて(5)において，$Q = x_i$ $(i = 1, 2, 3)$ とおき，$x_i{}^R = x_i$ を用いると

$$(x_i, H)^R + (x_i{}^R, H) = (x, H)^R + (x, H) = 0$$

すなわち,

$$\left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\right)^R=-\frac{\partial H}{\partial p_i} \tag{12}$$

ところが仮定 a) および b) により

$$\frac{\partial H}{\partial p_i{}^R}=-\frac{\partial H}{\partial p_i}$$

したがってこの式は $p_i{}^R=-p_i$ が成り立てば満たされ,(11)が成り立つことになる。

定理 3. F, G を任意の力学変数あるいはその関数とすると

$$(F, G)^R+(F^R, G^R)=0 \tag{13}$$

(証明) これは定理 1. の一般化である。上の仮定 a), b) および定理 2. より[†]

$$\begin{aligned}(F, G)^R&=\sum_r\left(\frac{\partial F}{\partial x_r}\cdot\frac{\partial G}{\partial p_r}-\frac{\partial F}{\partial p_r}\cdot\frac{\partial G}{\partial x_r}\right)^R\\&=\sum_r\left(\frac{\partial F^R}{\partial x_r{}^R}\cdot\frac{\partial G^R}{\partial p_r{}^R}-\frac{\partial F^R}{\partial p_r{}^R}\cdot\frac{\partial G^R}{\partial x_r{}^R}\right)\\&=-\sum_r\left(\frac{\partial F^R}{\partial x_r}\cdot\frac{\partial G^R}{\partial p_r}-\frac{\partial F^R}{\partial p_r}\cdot\frac{\partial G^R}{\partial x_r}\right)\\&=-(F^R, G^R)\end{aligned} \tag{14}$$

定理 4. ある力学変数,あるいはその関数 Q とその時間微分とは時間反転に対し逆符号の変換を受ける。

$$\left(\frac{dQ}{dt}\right)^R=-\frac{dQ^R}{dt} \tag{15}$$

(証明) $\left(\frac{dQ}{dt}\right)^R=(Q, H)^R=-(Q^R, H)=-\frac{dQ^R}{dt}$

定理 5. Lをラグランジアンとしたとき

$$L^R=L \tag{16}$$

(証明) $L^R=(\sum_r p_r\dot{q}_r-H)^R=\sum_r p_r{}^R\dot{q}_r{}^R-H^R=\sum_r p_r\dot{q}_r-H=L$

A-3 古典電磁気学

古典力学における演算Rは容易に電磁場に対しても拡張される。自由な荷電粒子を電磁場に入れると,そのハミルトニアンは次式で与えられる。

$$H=\frac{1}{2m}\{\boldsymbol{p}-e\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})\}^2+e\varphi(\boldsymbol{x}) \tag{17}$$

---

† 時間反転の議論においては, Poisson 括弧を定義するときに正準変数の選び方を制限し,時間反転に対する変換性の明らかな組をとった方が便利である。

いま $H^R=H$, $\boldsymbol{p}^R=-\boldsymbol{p}$ を(17)に対して両立させようとすると，唯一の可能性は

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})^R=-\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) \tag{18}$$

$$\varphi(\boldsymbol{x})^R=\varphi(\boldsymbol{x}) \tag{19}$$

したがって電場と磁場との変換性は

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})^R=\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) \tag{20}$$

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})^R=-\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}) \tag{21}$$

これから Poynting ベクトルは，$\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$ に比例するから符号が変わることがわかる。

Maxwell の方程式は

$$\begin{aligned}&\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H}-\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}=4\pi\boldsymbol{j}, \qquad \mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}+\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}=0\\ &\mathrm{div}\,\boldsymbol{E}=4\pi\rho, \qquad \mathrm{div}\,\boldsymbol{H}=0\end{aligned} \tag{22}$$

であるから，この方程式系が可逆性と矛盾しないためには，それぞれの方程式の各項が時間反転に対して同じ変換性をもたなければならないから

$$\boldsymbol{j}^R=-\boldsymbol{j} \tag{23}$$

$$\rho^R=\rho \tag{24}$$

もしも一つの方程式が，Rに対して変換性の異なるものを含めば，あるいは $H^R\neq H$ ならば，その系は非可逆となる。次にその例をあげよう。

例 1. Ohm の法則 $\boldsymbol{j}=\sigma\boldsymbol{E}$ (σ は電気伝導率) この場合 $\boldsymbol{j}$ は(−)型，$\boldsymbol{E}$ は(＋)型なのでこのような法則の成り立つ系は非可逆である。実際 $\sigma\neq 0$ ならば Joule 熱が発生するので明らかである。

例 2. 磁気的および電気的双極子モーメント このようなモーメントが静的に存在すれば，そのハミルトニアンは

$$H=-\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{md}}\boldsymbol{H}-\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{ed}}\boldsymbol{E} \tag{25}$$

さて $\boldsymbol{\mu}$ はいずれもスピンに比例するから†，角運動量と同様にRに対して奇である。ところで $\boldsymbol{H}$ は奇だが，$\boldsymbol{E}$ は偶であるから，(25)の第二項は可逆性を破る。したがって，時間に対する可逆性は

$$\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{ed}}=0 \tag{26}$$

を要求する。実験的には $|\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{md}}/e|$ は Compton 波長の程度となり観測されているが，$\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{ed}}$ については，中性子に対して

$$\left|\frac{\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{ed}}}{e}\right|<5\times10^{-23}\,\mathrm{cm} \tag{27}$$

という上限が知られているにすぎない。ただし e は素荷電を表わす。

† これは厳密にいえば量子論的問題である。

A-4 量子力学

古典力学では状態Sは位相空間内の点で代表されたが，量子力学ではSは Hilbert 空間の点，正しくは ray によって代表される。したがって可逆性の条件はΨを状態ベクトルとしたときに次のように表わされる。

$$\Psi_i \xrightarrow{t} \Psi_f \quad ならば \quad \Psi_f{}^R \xrightarrow{t} \Psi_i{}^R \tag{28}$$

この演算Rに対して次のような付加的な仮定をおく。

a) Ψ^R の形は，適当なユニタリー行列 U を用いて次の形に書くことができる。ただし T は行列を転置することを表わす。

$$\Psi^R = U^{\mathrm{T}}\Psi^* \tag{29}$$

b) 力学変数あるいはその関数の期待値に対して，次の**対応原理**が成り立つ。

$$(\Psi^R,\ Q\Psi^R) = \varepsilon_Q(\Psi,\ Q\Psi) \tag{30}$$

ただし ε_Q は古典的な Q の変換性を表わし，次式で定義される。

$$Q_{\mathrm{cl}}{}^R = \varepsilon_Q Q_{\mathrm{cl}} \qquad (\mathrm{cl}\ は\ \mathrm{classical}\ の略)$$

これだけの仮定があれば，量子力学における時間反転が定義できる。古典論における知識はみな仮定 b) の中に含まれている。

定理 6. 可逆な系のハミルトニアンはユニタリー行列Uと次の関係がある。

$$H = UH^{\mathrm{T}}U^{-1} \tag{31}$$

（証明） 時間反転に対する可逆性は，次のように表現できる。

$$\Psi_f = e^{-itH}\Psi_i \quad ならば \quad \Psi_i{}^R = e^{-iHt}\Psi_f{}^R \tag{32}$$

そこで仮定 a) を用いると

$$\begin{aligned} U^{\mathrm{T}}\Psi_i{}^* &= e^{-iHt}U^{\mathrm{T}}(e^{-iHt}\Psi_i)^* \\ &= e^{-iHt}U^{\mathrm{T}}e^{iH^*t}\Psi_i{}^* \end{aligned}$$

この式は任意の Ψ_i に対して成り立つべきであるから

$$U^{\mathrm{T}} = e^{-iHt}U^{\mathrm{T}}e^{iH^{\mathrm{T}}t} \qquad (H\ は\ \mathrm{Hermite})$$

あるいは

$$\begin{aligned} e^{iHt} &= U^{\mathrm{T}}e^{iH^{\mathrm{T}}t}(U^{\mathrm{T}})^{-1} \\ &= e^{iU^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}}(U^{\mathrm{T}})^{-1}t} \end{aligned}$$

すなわち

$$\begin{aligned} H &= U^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}}(U^{-1})^{\mathrm{T}} \\ &= (U^{-1}HU)^{\mathrm{T}} \end{aligned}$$

この式を転置したものをとれば(31)が得られる。

ここで注意すべきことは，仮定 a) で導入された変換はユニタリーでないことである。つまり

$$\Phi'=U\Phi, \qquad \Psi'=U\Psi \tag{33}$$

のようなユニタリー変換に対しては，スカラー積が不変である。

$$(\Phi', \Psi')=(\Phi, \Psi) \tag{34}$$

これに対して仮定 a) で導入された R 変換に対しては

$$(\Phi^R, \Psi^R)=(\Psi, \Phi) \tag{35}$$

このような変換を，**antiunitary transformation**（**反ユニタリー変換**）とよぶ。また，空間反転や荷電共役はユニタリー変換なので，時間反転はこれらの変換とはいろいろな点で性質が異なる。前者を**弱反転**(weak reflection)，後者を**強反転**(strong reflection)とよぶこともある。これは Pauli の命名による。

定理 7. $Q^R=UQ^{\mathrm{T}}U^{-1}$ とおけば†

$$(\Psi^R, Q\Phi^R)=(\Phi, Q^R\Psi) \tag{36}$$

（証明） 機械的計算により

$$\begin{aligned}(\Psi^R, Q\Phi^R)&=(\Psi^*, U^*QU^{\mathrm{T}}\Phi^*)\\&=(\Phi, (U^*QU^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\Psi)\\&=(\Phi, UQ^{\mathrm{T}}U^{-1}\Psi)\\&=(\Phi, Q^R\Psi)\end{aligned}$$

これは Schrödinger 表示と Heisenberg 表示との関係に似ている。時間反転という演算を状態ベクトルに押しつけるか，演算子に押しつけるかの二つの選択があることを意味する。さて古典論との比較には Heisenberg 表示の方が便利であるから，ここでも対応原理 b) を使うためには演算子に時間反転を施した方が簡単になる。なわち，b) は次のように表現される。

$$Q_{\mathrm{cl}}^R=\varepsilon_Q Q_{\mathrm{cl}} \quad ならば \quad Q^R=\varepsilon_Q Q \tag{37}$$

したがって形の上では古典論と量子論とが全く同じ式で表わされることになる。このようにして導入された演算子に対する演算 R は次の性質をもつ。

1) **線形性**

$$(c_1Q_1+c_2Q_2)^R=c_1Q_1{}^R+c_2Q_2{}^R \tag{38}$$

演算子に対する R は上のように線形だが，状態ベクトルに対しては違うことに注意すべきである。すなわち，

---

† 定理 6. は $H^R=H$ に帰する。

$$(c_1\Psi_1+c_2\Psi_2)^R=c_1{}^*\Psi_1{}^R+c_2{}^*\Psi_2{}^R \tag{39}$$

このように c 数まで変換されると混乱を生じることがあるので，以下ではもっぱら演算子に対する R のみを考えることにする。

2）**積の変換**

$$(Q_1Q_2)^R=Q_2{}^RQ_1{}^R \tag{40}$$

このように順序が逆になる。古典論では順序が問題にならなかったので，仮定 a) の(3)式が成り立ったのである。

3）**回帰性**　Q が観測可能量(observable)とすると，

$$Q^{RR}=\varepsilon_Q{}^2Q=Q \tag{41}$$

定理 8.　$U^{\mathrm{T}}U^{-1}$ は絶対値が 1 で表示によらない数である。

（証明）厳密にいうとこの定理には注釈がいる。いわゆる**超選択規則**(super selection rule)により遷移が禁止されている状態は別の Hilbert 空間と考え，一つ一つの Hilbert 空間内でだけ $U^{\mathrm{T}}U^{-1}$ の値が表示によらず固定されるということであり，このことの意味については次の U の選択の所で述べられる†。ここでは上述の超選択規則について述べるほど程度の高くない証明で満足する。

さて一つの表示を決めると，観測可能量 Q に対して

$$\begin{aligned}Q^{RR}&=U(UQ^{\mathrm{T}}U^{-1})^{\mathrm{T}}U^{-1}\\&=(U^{\mathrm{T}}U^{-1})^{-1}Q(U^{\mathrm{T}}U^{-1})=Q\end{aligned} \tag{42}$$

すなわち $U^{\mathrm{T}}U^{-1}$ はすべての観測可能量と可換である。したがって個数を決めた粒子系を考えている場合には，$U^{\mathrm{T}}U^{-1}$ は c 数でなければならない††。

$$U^{\mathrm{T}}U^{-1}=c \tag{43}$$

また U はユニタリーであるから，c の絶対値は 1 である。

$$|c|=1 \tag{44}$$

また c が表示の選び方によらないことは次のように証明される。S を一つのユニタリー変換として，一つの表示での H が，他の表示での H' に次のようにして移ったとする。

$$H\longrightarrow H'=SHS^{-1} \tag{45}$$

---

† 粒子 1 個の系に限れば $U^{\mathrm{T}}U^{-1}$ は表示によらないが，一般に Fermi 粒子が奇数個の系と偶数個の系とではその値が異なる。

†† このことは $U^{\mathrm{T}}U^{-1}$ が観測不可能な量と必ずしも可換ではないことを意味する。たとえば量子化された Fermi 場の演算子とは可換ではない。しかしこの本では場の量子論は考えていないのでこのような一般的な場合に関する考察は省略する。

新しい表示での U' は次の式を満たすように定める。

$$U'H'^{\mathrm{T}}U'^{-1}=H' \tag{46}$$

そうすると，(31),(45)から(46)を満たす U' が次の形で与えられることがわかる。

$$U'=SUS^{\mathrm{T}} \tag{47}$$

これで容易に示せるように

$$U'^{\mathrm{T}}U'^{-1}=U^{\mathrm{T}}U^{-1} \tag{48}$$

したがって c の値は表示の選び方によらない。

定理 9. F, G を任意の力学変数あるいはその関数とすると

$$[F, G]^R=-[F^R, G^R] \tag{49}$$

（証明） これは古典論における定理 3. を量子論に翻訳したものである。これは R の性質から直ちに証明できる。

例 3. 正準交換関係

$$[x, p_x]^R=i^R=i=[x, p_x]=-[x^R, p_x{}^R]$$

A-5 ユニタリー行列 U の選択および S 行列

いままでの議論では系の可逆性を仮定していたが，ある系が実際に可逆であることを示すためには U の存在を証明しなければならない。そのためには与えられた一つの表示ですべての観測可能量に対して

$$UQ^{\mathrm{T}}U^{-1}=\varepsilon_Q Q \tag{37}$$

が成り立つような U を求めなければならない。さて軌道角運動量

$$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p} \tag{50}$$

は R に対して符号を変えるから，スピンも全角運動量 $\boldsymbol{J}$ も符号を変えねばならない。すなわち

$$U\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}U^{-1}=-\boldsymbol{J} \tag{51}$$

さて J_z を対角化し，J_x は実対称行列，J_y は純虚反対称行列となるような表示を選ぶ。この表現では

$$J_x{}^{\mathrm{T}}=J_x, \qquad J_y{}^{\mathrm{T}}=-J_y, \qquad J_z{}^{\mathrm{T}}=J_z \tag{52}$$

したがって(51)を分解すると

$$\begin{aligned} UJ_xU^{-1}&=-J_x \\ UJ_yU^{-1}&=J_y \\ UJ_zU^{-1}&=-J_z \end{aligned} \tag{53}$$

この方程式を満たすような U は次式で与えられる。

$$U=e^{i\pi J_y} \tag{54}$$

このことは角運動量の成分の間の交換関係を用いて容易に証明される。さてこの表現から

$$U^{\mathrm{T}}U^{-1}=e^{-2i\pi J_y}=(-1)^{2J} \tag{55}$$

この値はもはや表現によらないことは定理 8. の教えるところであるから

$$U^{\mathrm{T}}=\ \ U \qquad (J=\text{整数}) \tag{56}$$

$$U^{\mathrm{T}}=-U \qquad (J=\text{半整数}) \tag{57}$$

J が整数のときと半整数のときとで異なるが，これは前に注意したようにそれぞれ異なる Hilbert 空間に対応し，それぞれの Hilbert 空間内では $U^{\mathrm{T}}U^{-1}$ は一定である。なお場を量子化していないから，Fermi 粒子の数を一定にした系が一つの Hilbert 空間に対応すると考えている。

定理 10.　もし Φ が Hermite 演算子 Q の固有状態で，その固有値が q ならば，すなわち

$$Q\Phi=q\Phi \tag{58}$$

ならば，Φ^R も Q の固有状態で，その固有値は $\varepsilon_Q q$ である。

$$Q\Phi^R=\varepsilon_Q q\Phi^R \tag{59}$$

（証明）　仮定より直ちに

$$(Q\Phi)^R=q\Phi^R$$

ところが

$$\begin{aligned}(Q\Phi)^R&=U^{\mathrm{T}}(Q\Phi)^*\\&=U^{\mathrm{T}}Q^*\Phi^*\\&=U^{\mathrm{T}}Q^{\mathrm{T}}(U^{\mathrm{T}})^{-1}U^{\mathrm{T}}\Phi^*\\&=(U^{-1}QU)^{\mathrm{T}}\Phi^R\\&=\varepsilon_Q Q\Phi^R\end{aligned}$$

したがって $\varepsilon_Q{}^2=1$ とすれば，(59)が直ちに証明される。たとえば

$$(\Phi_{\boldsymbol{p},m_S})^R\sim\Phi_{-\boldsymbol{p},-m_S} \tag{60}$$

（～は位相を除いて等しいことを意味する）

定理 11.　時間反転により散乱状態は（＋）と（－）とが入れかわる。

$$(\Psi^{(+)}_{\boldsymbol{p},m_S})^R\sim\Psi^{(-)}_{-\boldsymbol{p},-m_S} \tag{61}$$

（証明）　この証明は Lippmann-Schwinger の形式を利用して与えられる。

$$\Psi_a{}^{(+)}=\Phi_a+\frac{1}{E_a-H_0+i\varepsilon}V\Psi_a{}^{(+)} \tag{62}$$

ただし $a=(\boldsymbol{p},m_S)$ とする。この方程式に R 演算を施して $(\Psi_a{}^{(+)})^R$ の満

たす方程式を作る。

$$
\begin{aligned}
(\Psi_a{}^{(+)})^R &= \Phi_a{}^R + U^{\mathrm{T}}\left(\frac{1}{E_a-H_0+i\varepsilon}V\Psi_a{}^{(+)}\right)^* \\
&= \Phi_a{}^R + U^{\mathrm{T}}\left(\frac{1}{E_a-H_0{}^*-i\varepsilon}V^*\right)(U^{\mathrm{T}})^{-1}U^{\mathrm{T}}(\Psi_a{}^{(+)})^* \\
&= \Phi_a{}^R + \frac{1}{E_a-H_0{}^R-i\varepsilon}V^R(\Psi_a{}^{(+)})^R \\
&= \Phi_{-a} + \frac{1}{E_a-H_0-i\varepsilon}V(\Psi_a{}^{(+)})^R
\end{aligned} \tag{63}
$$

ただし $H_0{}^R=H_0$, $V^R=V$ を仮定している。また $-a=(-\boldsymbol{p}, -m_S)$ とする。さて上の方程式は $\Psi_{-a}^{(-)}$ の満たす方程式そのものである。したがって定理が成り立つ。

定理 12. S を S 行列とすると，可逆系に対しては

$$S^R=S \tag{64}$$

（証明） **4-11** で証明されたように

$$S_{ba}=(\Psi_b{}^{(-)}, \Psi_a{}^{(+)})$$

であるから，定理 11. と演算 R の反ユニタリー性により

$$
\begin{aligned}
S_{ba} &= (\Psi_a{}^{(+)R}, \Psi_b{}^{(-)R}) \\
&= (\Psi_{-a}^{(-)}, \Psi_{-b}^{(+)}) \\
&= S_{-a,-b}
\end{aligned} \tag{65}
$$

さて運動量表示で平面波 Φ を用いると

$$S_{ba}=(\Phi_b, S\Phi_a) \tag{66}$$

したがって上に証明されたことを用いて

$$
\begin{aligned}
(\Phi_b, S\Phi_a) &= (\Phi_{-a}, S\Phi_{-b}) \\
&= (\Phi_a{}^R, S\Phi_b{}^R) \\
&= (\Phi_b, S^R\Phi_a)
\end{aligned}
$$

ところが Φ_a, Φ_b は任意の状態であるから

$$S^R=S$$

A-6 詳細つりあいの原理(principle of detailed balance)

いま次のような反応を考える。

$$\mathrm{a}+\mathrm{A} \rightleftharpoons \mathrm{B}+\mathrm{b} \tag{67}$$

そして反応の初期状態で衝突する2粒子 a, A, あるいは b, B はいずれも偏極していないものとしよう。そうするとこの反応と逆反応の断面積の間には簡単な関係があることを，時間反転に対する可逆性に基づいて示すこ

とができる。

まず上で証明したように

$$\langle \boldsymbol{p}_f,\ m_{S_f}|\mathcal{M}|\boldsymbol{p}_i,\ m_{S_i}\rangle=\langle -\boldsymbol{p}_i,\ -m_{S_i}|\mathcal{M}|-\boldsymbol{p}_f,\ -m_{S_f}\rangle \quad (68)$$

ただし $\mathcal{M}$ は **2-4** で定義した遷移振幅である。$\boldsymbol{p}_i$ および $\boldsymbol{p}_f$ はそれぞれ a+A, B+b の相対運動量である。また m_{S_i} と m_{S_f} とはそれぞれ a, A および b, B のスピンの z 成分を表わしている。そうすると

$$\sum_{m_{S_i}, m_{S_f}} |\langle \boldsymbol{p}_f,\ m_{S_f}|\mathcal{M}|\boldsymbol{p}_i,\ m_{S_i}\rangle|^2 = \sum_{m_{S_i}, m_{S_f}} |\langle -\boldsymbol{p}_i,\ -m_{S_i}|\mathcal{M}|-\boldsymbol{p}_f,\ -m_{S_f}\rangle|^2 \quad (69)$$

ここに和は，スピンについてそのすべての可能な値について加えたものである。この式が成り立つから3次元回転に対する不変性より，右辺は

$$\sum_{m_{S_i}, m_{S_f}} |\langle \boldsymbol{p}_i,\ m_{S_i}|\mathcal{M}|\boldsymbol{p}_f,\ m_{S_f}\rangle|^2 \quad (70)$$

に等しい。もちろんこの等式はスピンについての和をとってはじめて成り立つものである。したがって

$$\sum_{m_{S_i}, m_{S_f}} |\langle \boldsymbol{p}_f,\ m_{S_f}|\mathcal{M}|\boldsymbol{p}_i,\ m_{S_i}\rangle|^2 = \sum_{m_{S_i}, m_{S_f}} |\langle \boldsymbol{p}_i,\ m_{S_i}|\mathcal{M}|\boldsymbol{p}_f,\ m_{S_f}\rangle|^2 \quad (71)$$

ところで **2-4** の(38)で示したように，そこで使われた規格化 $V=(2\pi)^3$ を用いると

$$\frac{d\sigma(\rightarrow)}{d\Omega}=\left(\frac{2\pi}{W}\right)^2\left(\frac{p_f}{p_i}\right)\frac{1}{(2S_a+1)(2S_A+1)}\sum_{\text{spin}}|\mathcal{M}(\rightarrow)|^2 \quad (72)$$

$$\frac{d\sigma(\leftarrow)}{d\Omega}=\left(\frac{2\pi}{W}\right)^2\left(\frac{p_i}{p_f}\right)\frac{1}{(2S_b+1)(2S_B+1)}\sum_{\text{spin}}|\mathcal{M}(\leftarrow)|^2 \quad (73)$$

また(71)より，(72)と(73)でのスピンに関する和の項は等しいことがわかっているから，両者の比をとると

$$\frac{d\sigma(\rightarrow)}{d\Omega}\Big/\frac{d\sigma(\leftarrow)}{d\Omega}=\left(\frac{p_f}{p_i}\right)^2\frac{(2S_b+1)(2S_B+1)}{(2S_a+1)(2S_A+1)} \quad (74)$$

これを**詳細つりあいの原理**とよぶ。この式が成り立っているかどうかを調べることによって，時間反転に対する可逆性のテストができる。また可逆性が成り立っていると仮定すれば，ある粒子のスピンを定めることができる。たとえば

$$\mathrm{p}+\mathrm{p} \rightleftarrows \mathrm{d}+\pi^+ \quad (75)$$

において $S_{\mathrm{p}}=1/2$, $S_{\mathrm{d}}=1$ がわかっているので，これからパイ中間子のスピンが0であることが決定された。

A-7 電磁場の時間反転

電磁場の時間反転は直観的な議論から決められる。運動量 $\boldsymbol{k}$, 偏光 $\boldsymbol{e}$ の光子が消滅する過程の逆は，運動量 $-\boldsymbol{k}$, 偏光 $\boldsymbol{e}$ の光子が創られる過程である。ここで逆とはフィルムの逆回しの意味である。$\boldsymbol{e}$ の方向は $\boldsymbol{E}$ の方向であり，これは R により変わらないから $\boldsymbol{e}$ は $-\boldsymbol{e}$ にならない。上に述べたことを式で表現すると次のようになる。

$$\begin{aligned} a(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{e})^R &= -a^*(-\boldsymbol{k}, \boldsymbol{e}) \\ a^*(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{e})^R &= -a(-\boldsymbol{k}, \boldsymbol{e}) \end{aligned} \tag{76}$$

符号がマイナスとなるのは，ポテンシャル $\boldsymbol{A}$ が $-\boldsymbol{A}$ に変わるからである。

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \sqrt{\frac{4\pi}{V}} \sum_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{e}} \frac{\boldsymbol{e}}{\sqrt{2k}} \{a(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{e})e^{i\boldsymbol{kx}} + a^*(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{e})e^{-i\boldsymbol{kx}}\} \tag{77}$$

において R 変換を受けるのは a と a^* であるから，(76)を使うと $\boldsymbol{A}^R = -\boldsymbol{A}$ が出る。

さて a, a^* を実に選ぶ表示では

$$\begin{aligned} Ua(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{e})U^{-1} &= -a(-\boldsymbol{k}, \boldsymbol{e}) \\ Ua^*(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{e})U^{-1} &= -a^*(-\boldsymbol{k}, \boldsymbol{e}) \end{aligned} \tag{78}$$

を満たす U を選ばねばならない。この方程式を満たす U は

$$U(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{e}) = \exp\left[\frac{i\pi}{2}\{a^*(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{e}) + a^*(-\boldsymbol{k}, \boldsymbol{e})\}\{a(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{e}) + a(-\boldsymbol{k}, \boldsymbol{e})\}\right] \tag{79}$$

を用いて次のように表わされる†。

$$U^2 = \prod_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{e}} U(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{e}) \tag{80}$$

ここに U^2 となっているのは，$U(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{e})$ は $\boldsymbol{k}$ と $-\boldsymbol{k}$ の光子に対して(78)を満たすので，すべての $\boldsymbol{k}$ について(80)のように積をとると，すべての $\boldsymbol{k}$ が二重に入ってしまうからである。

A-8 Dirac 粒子の時間反転

Dirac 粒子に対しては $\boldsymbol{\alpha}$ は速度を表わすから

$$\boldsymbol{\alpha}^R = -\boldsymbol{\alpha} \tag{81}$$

また $H = \boldsymbol{\alpha p} + \beta m$ より

$$\beta^R = \beta \tag{82}$$

そこで波動関数 ψ の時間反転を

---

† $U(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{e})$ は(78)を満たすが，すべての $\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{e}$ に対して成り立つ U は(80)で与えられる。

$$\psi_\alpha{}^R=\psi_\beta{}^* U_{\beta\alpha}=U_{\alpha\beta}{}^T\psi_\beta{}^* \tag{83}$$

と書くならば

$$\begin{aligned} U\boldsymbol{\alpha}^T U^{-1}&=-\boldsymbol{\alpha} \\ U\beta^T U^{-1}&=\beta \end{aligned} \tag{84}$$

このような関係を満たす U は位相因子を除いては次のように与えられる。

$$U=\gamma_5 C \tag{85}$$

ただし C は 1-10 で導入された荷電共役の Dirac 行列である。

時間反転に対する可逆性は長い間信じられていたが，実はほんのわずかだけ可逆性が破れていることが間接的な実験により 1964 年に発見された。これは，中性 K 中間子とよばれる素粒子が 2 個のパイ中間子に崩壊する現象の研究からわかったことである。しかしながら実際問題としては可逆性が成り立っているとしても多くの問題では大変よい近似になっている。

演習問題解答

演習問題 1.

1. この問題は 1–7 節における Dirac 方程式の共変性の証明をそっくりまねすればよい。1–6 の方程式(4)から出発する。

$$i\frac{\partial}{\partial t}\phi=\boldsymbol{\sigma p}\phi$$

この方程式の共変性を証明するために

$$\Gamma_k=\sigma_k, \quad \Gamma_4=i$$

とおくと，Weyl 方程式は次の形に書ける。

$$\Gamma_\mu\frac{\partial\phi}{\partial x_\mu}=0, \quad \frac{\partial\phi^\dagger}{\partial x_\mu}\Gamma_\mu=0$$

さて Lorentz 変換に対する変換性を次の形に仮定する。

$$\phi\longrightarrow S\phi, \quad \therefore \quad \phi^\dagger\longrightarrow\phi^\dagger S^\dagger$$

さて上の二つの方程式の共変性は，次の式が成り立てば証明できる。

$$S^\dagger\Gamma_\mu S=\sum_\nu a_{\mu\nu}\Gamma_\nu$$

無限小変換に対してこの式は次の形に書ける。

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\varepsilon^*_{\mu\nu}T^\dagger_{\mu\nu}\Gamma_\lambda+\frac{1}{2}\Gamma_\lambda\varepsilon_{\mu\nu}T_{\mu\nu}&=\varepsilon_{\lambda\rho}\Gamma_\rho\\&=\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu}(\delta_{\mu\lambda}\Gamma_\nu-\delta_{\nu\lambda}\Gamma_\mu)\end{aligned}$$

ところが $\varepsilon_{\mu\nu}=\mathrm{real}$ となるのは $\mu, \nu\neq 4$，それに対し $\varepsilon_{\mu\nu}=\mathrm{imaginary}$ となるのは μ か ν のどちらかが 4 に等しい場合である。このことを考慮すれば直ちに上の式を満たす T が求まる。すなわち

$$T_{12}=T_{34}=\frac{i}{2}\sigma_3, \quad T_{23}=T_{14}=\frac{i}{2}\sigma_1, \quad T_{31}=T_{24}=\frac{i}{2}\sigma_2$$

が解である。またこの結果から明らかなように

$$\mathrm{Tr}(T_{\mu\nu})=0$$

したがって $\det S=1$ となり，この変換はやはり unimodular である†。この場合おもしろいことは，$j_\mu=\phi^\dagger\Gamma_\mu\phi$ とすると，$\partial_\mu j_\mu=0$ のほかに $j_\mu\cdot j_\mu=0$ が得られることである。また 2 次元表現では空間反転に対する S は存在しない。

2. 三つの式を順々に証明してゆけばよい。まず

$$\gamma_\lambda\gamma_a\gamma_\lambda=(2\delta_{\lambda a}-\gamma_a\gamma_\lambda)\gamma_\lambda=2\gamma_a-4\gamma_a=-2\gamma_a$$

次にこの結果を使って

$$\begin{aligned}\gamma_\lambda\gamma_a\gamma_b\gamma_\lambda&=(2\delta_{\lambda a}-\gamma_a\gamma_\lambda)\gamma_b\gamma_\lambda\\&=2\gamma_b\gamma_a-\gamma_a(\gamma_\lambda\gamma_b\gamma_\lambda)\\&=2\gamma_b\gamma_a+2\gamma_a\gamma_b\\&=4\delta_{ab}\end{aligned}$$

同様に再びこの結果を使って

---

† 行列式が 1 となるような行列を意味する。

$$\gamma_\lambda\gamma_a\gamma_b\gamma_c\gamma_\lambda=(2\delta_{\lambda a}-\gamma_a\gamma_\lambda)\gamma_b\gamma_c\gamma_\lambda$$
$$=2\gamma_b\gamma_c\gamma_a-\gamma_a(\gamma_\lambda\gamma_b\gamma_c\gamma_\lambda)$$
$$=(2\gamma_b\gamma_c-4\delta_{bc})\gamma_a$$
$$=-2\gamma_c\gamma_b\gamma_a$$

3. $\mathrm{Tr}(\gamma_\sigma\gamma_\lambda\gamma_\mu\gamma_\nu)=\mathrm{Tr}(2\delta_{\sigma\lambda}\gamma_\mu\gamma_\nu-\gamma_\lambda\gamma_\sigma\gamma_\mu\gamma_\nu)$

$$=8\delta_{\sigma\lambda}\delta_{\mu\nu}-8\delta_{\sigma\mu}\delta_{\lambda\nu}+\mathrm{Tr}(2\delta_{\sigma\nu}\gamma_\lambda\gamma_\mu-\gamma_\lambda\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\sigma)$$
$$=8(\delta_{\sigma\lambda}\delta_{\mu\nu}-\delta_{\sigma\mu}\delta_{\lambda\nu}+\delta_{\sigma\nu}\delta_{\lambda\mu})-\mathrm{Tr}(\gamma_\sigma\gamma_\lambda\gamma_\mu\gamma_\nu)$$

ゆえに $\mathrm{Tr}(\gamma_\sigma\gamma_\lambda\gamma_\mu\gamma_\nu)=4(\delta_{\sigma\lambda}\delta_{\mu\nu}-\delta_{\sigma\mu}\delta_{\lambda\nu}+\delta_{\sigma\nu}\delta_{\lambda\mu})$

4. 前問の解答に用いた方法を拡張して

$$\mathrm{Tr}(\gamma_{\nu_1}\gamma_{\nu_2}\cdots\gamma_{\nu_n})=2\delta_{\nu_1\nu_2}\mathrm{Tr}(\gamma_{\nu_3}\cdots\gamma_{\nu_n})-\mathrm{Tr}(\gamma_{\nu_2}\gamma_{\nu_1}\gamma_{\nu_3}\cdots\gamma_{\nu_n})$$
$$=2\sum_{i=2}^{n}\delta_{\nu_1\nu_i}(-1)^i\,\mathrm{Tr}(\gamma_{\nu_2}\cdots\gamma_{\nu_{i-1}}\gamma_{\nu_{i+1}}\cdots\gamma_{\nu_n})$$
$$+(-1)^{n-1}\mathrm{Tr}(\gamma_{\nu_2}\cdots\gamma_{\nu_n}\gamma_{\nu_1})$$

したがって $\mathrm{Tr}(AB)=\mathrm{Tr}(BA)$ を用いると，nが偶数のときには

$$\mathrm{Tr}(\gamma_{\nu_1}\gamma_{\nu_2}\cdots\gamma_{\nu_n})=\sum_{i=2}^{n}\delta_{\nu_1}\delta_{\nu_i}(-1)^i\,\mathrm{Tr}(\gamma_{\nu_2}\cdots\gamma_{\nu_{i-1}}\gamma_{\nu_{i+1}}\cdots\gamma_{\nu_n})$$

という漸化式を得る。nが奇数のときには次のように0になる。

$$\mathrm{Tr}(\gamma_{\nu_1}\gamma_{\nu_2}\cdots\gamma_{\nu_n})=\mathrm{Tr}(\gamma_5{}^2\gamma_{\nu_1}\gamma_{\nu_2}\cdots\gamma_{\nu_n})$$
$$=\mathrm{Tr}(\gamma_5\gamma_{\nu_1}\gamma_{\nu_2}\cdots\gamma_{\nu_n}\gamma_5)$$
$$=(-1)^n\,\mathrm{Tr}(\gamma_{\nu_1}\gamma_{\nu_2}\cdots\gamma_{\nu_n})$$

したがってnが奇数ならば trace は0である。

5. 1-9 で見たように，自由な Dirac 粒子に対しては

$$h=\frac{\boldsymbol{\sigma p}}{p}=\frac{\boldsymbol{\sigma p}}{\sqrt{E^2-m^2}}$$

は保存量である。静磁場しかない場合には，スカラー・ポテンシャルφを0とおけるから，Dirac 方程式は 1-10 (70)により与えられる。

$$H\psi=\{\rho_1\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{p}-e\boldsymbol{A})+\rho_3 m\}\psi=E\psi$$

静磁場では，$\boldsymbol{A}$ は時間によらず，E すなわちエネルギーは保存する。またこのときに

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{p}-e\boldsymbol{A})$$

というスカラー積はゲージ不変であり，かつ運動の恒量である。そしてその固有値の絶対値は，再び $\sqrt{E^2-m^2}$ で与えられる。したがってこのときに

$$h=\frac{\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{p}-e\boldsymbol{A})}{\sqrt{E^2-m^2}}$$

を helicity と定義すれば保存量となる。明らかに電場の存在するとき，および異常磁気モーメント (anomalous magnetic moment) があるときには上に定義した helicity は保存されない。

6. この問題に対する Dirac 方程式は

$$E\psi=\{\boldsymbol{\alpha p}+\beta m+\beta V(r)\}\psi,\qquad \text{ただし}\quad V(r)=-\frac{Ze^2}{r}$$

Coulomb 場のときとの違いは V に β がついていることである。この問題の取り扱いは Coulomb 場のときとほとんど同じであるから，違う所のみを拾って書く。ま

ず φ, χ の方程式は

$$E\varphi=\frac{1}{i}\boldsymbol{\sigma}\nabla\chi+(m+V)\varphi$$

$$E\chi=\frac{1}{i}\boldsymbol{\sigma}\nabla\varphi-(m+V)\chi$$

すなわち $m-V$ だった所が $m+V$ に変わっている。同様に f, g の方程式は

$$(E+m+V)g(r)-\left\{\frac{d}{dr}+(1+k)\frac{1}{r}\right\}f(r)=0$$

$$(E-m-V)f(r)+\left\{\frac{d}{dr}+(1-k)\frac{1}{r}\right\}g(r)=0$$

また，u, v の方程式は，V を具体的に書くと

$$\left(E+m-\frac{Ze^2}{r}\right)v-\left(\frac{d}{dr}+\frac{k}{r}\right)u=0$$

$$\left(E-m+\frac{Ze^2}{r}\right)u+\left(\frac{d}{dr}-\frac{k}{r}\right)v=0$$

また u, v を r についてべき展開した場合の指示方程式は

$$Ze^2b_0+(\gamma+k)a_0=0$$

$$Ze^2a_0+(\gamma-k)b_0=0$$

これから

$$\gamma^2=k^2+(Ze^2)^2$$

ここで注意すべきことは $Ze^2<1$ の制限がなくなってしまうことである。

さて $E^2=m^2-\lambda^2$ を導入すると，u と v との r が大きい所での漸近形は $e^{-\lambda r}$ に比例すべきである。このとき $r\to\infty$ に対しては，Coulomb 場のときと同様に

$$\lim_{r\to\infty}\frac{v}{u}=-\frac{\lambda}{E+m}=-\sqrt{\frac{m-E}{m+E}}$$

そこで Coulomb 場のときと同様に

$$u=r^{\gamma}e^{-\lambda r}w_1,\qquad v=-\frac{\lambda}{E+m}r^{\gamma}e^{-\lambda r}w_2$$

とおくと，γ の内容は変わっているが，w_1, w_2 の方程式は

$$\frac{dw_1}{dr}-\lambda(w_1-w_2)+\frac{\gamma+k}{r}w_1-\frac{Ze^2\lambda}{E+m}\frac{w_2}{r}=0$$

$$\frac{dw_2}{dr}+\lambda(w_1-w_2)+\frac{\gamma-k}{r}w_2+\frac{Ze^2\lambda}{E-m}\frac{w_1}{r}=0$$

ここで次のようにおく。

$$x=2\lambda r,\quad A=\frac{Ze^2\lambda}{m+E},\quad B=\frac{Ze^2\lambda}{m-E},\quad AB=(Ze^2)^2=\gamma^2-k^2$$

そうすると

$$\frac{dw_1}{dx}-\frac{1}{2}(w_1-w_2)+\frac{1}{x}\{(\gamma+k)w_1-Aw_2\}=0$$

$$\frac{dw_2}{dx}+\frac{1}{2}(w_1-w_2)+\frac{1}{x}\{-Bw_1+(\gamma-k)w_2\}=0$$

そこで

$$w_1=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n,\qquad w_2=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$$

とおくと，a_n, b_n の間に次の漸化式が得られる。

$$na_n-\frac{1}{2}(a_{n-1}-b_{n-1})+(\gamma+k)a_n-Ab_n=0$$

$$nb_n+\frac{1}{2}(a_{n-1}-b_{n-1})-Ba_n+(\gamma-k)b_n=0$$

この2式の和より

$$\frac{a_n}{n-A+\gamma-k}=\frac{-b_n}{n-B+\gamma+k}\equiv c_n$$

この結果を上の第一式に代入すると

$$\frac{c_n}{c_{n-1}}=\frac{n-1+\gamma-(A+B)/2}{n(n+2\gamma)}\equiv\frac{n-1+\alpha}{n(n-1+\beta)}$$

ただし

$$\alpha=\gamma-\frac{1}{2}(A+B), \qquad \beta=1+2\gamma$$

さて，α, β, γ の定義は違うが，議論の進め方は Coulomb 場のときと同じで，結局

$$\alpha=-n' \quad (n'=0, 1, 2, \cdots)$$

が固有値問題の解となる。この α を書き直すと

$$\gamma-\frac{1}{2}\left(\frac{Ze^2\lambda}{m+E}+\frac{Ze^2\lambda}{m-E}\right)=-n', \qquad \lambda=\sqrt{m^2-E^2}$$

これから E を解くと

$$E=m\sqrt{1-\left(\frac{Ze^2}{\gamma+n'}\right)^2}, \qquad \text{ただし} \quad \gamma=\sqrt{k^2+(Ze^2)^2}, \ k=\pm\left(j+\frac{1}{2}\right)$$

そこで $n=n'+|k|=n'+j+\frac{1}{2}$ とおくと，

$$E_{n,j}=m\sqrt{1-\left(\frac{Ze^2}{n-|k|+\sqrt{k^2+(Ze^2)^2}}\right)^2}$$

この結果は，非相対論的近似ではもちろん Coulomb 場の場合と一致する。しかし相対論的には，$Ze^2>1$ でも解がある点で Coulomb 場の場合と著しく違う。

7. (1) では Coulomb ポテンシャルの場合と比較して $-Ze^2\to g^2$ とおきかえ，分母で $(\boldsymbol{k}_i-\boldsymbol{k}_f)^2\to(\boldsymbol{k}_i-\boldsymbol{k}_f)^2+\mu^2$ とおきかえればよい。なぜならば

$$\int d^3x' e^{i(\boldsymbol{k}_i-\boldsymbol{k}_f)\boldsymbol{x}}\frac{e^{-\mu r}}{r}=\frac{4\pi}{(\boldsymbol{k}_i-\boldsymbol{k}_f)^2+\mu^2}$$

したがって

$$|f_{\mathrm{Born}}(\theta)|^2=\left(\frac{g^2}{\mu^2+4k^2\sin^2(\theta/2)}\right)^2\times 4\left(m^2+k^2\cos^2\frac{\theta}{2}\right)$$

(2)の場合には，(1)と比べて trace の計算が少し違うので

$$m^2+k^2\cos^2\frac{\theta}{2}\longrightarrow m^2+k^2\sin^2\frac{\theta}{2}$$

というおきかえをすればよい。

8. **1-14** での Dirac 粒子の散乱の計算を Klein-Gordon の場合に書きかえる。このスピン0の粒子の1成分波動関数を ϕ とすると

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu}-ieA_\mu\right)^2\phi-m\phi=0$$

いま Born 近似では e について1次までしか考えなくてよいから

$$(\Box-m^2)\phi\approx 2ieA_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu}\phi$$

ただし，$\partial_\mu A_\mu=0$ となるゲージを採用している。いま引力となる Coulomb ポテンシャルを考えると（Born 近似では斥力でも同じだが）

$$A_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} \longrightarrow \varphi\frac{\partial}{\partial t}, \qquad e\varphi=-\frac{Ze^2}{r}$$

したがって Born 近似では

$$\psi(x)=\psi^{\rm in}(x)-2i\int d^4x' \Delta_{\rm ret}(x-x')e\varphi(x')\frac{\partial}{\partial t'}\psi^{\rm in}(x')$$

いま次のようにおく。

$$\psi(x)=e^{-iEt}\psi(\boldsymbol{x}), \quad \psi^{\rm in}(x)=e^{-iEt}\psi^{\rm in}(\boldsymbol{x}), \quad E^2=m^2+k^2$$

そうすると

$$\psi(\boldsymbol{x})=\psi^{\rm in}(\boldsymbol{x})-2i\int d^3x' \frac{1}{4\pi}\frac{e^{ik|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}e\varphi(\boldsymbol{x}')(-iE)\psi^{\rm in}(\boldsymbol{x}')$$
$$=\psi^{\rm in}(\boldsymbol{x})-\frac{E}{2\pi}\frac{e^{ikr}}{r}\int d^3x' e^{-i\boldsymbol{k}_f\boldsymbol{x}'}e\varphi(\boldsymbol{x}')\psi^{\rm in}(\boldsymbol{x}')$$

ゆえに $\psi^{\rm in}(\boldsymbol{x})=e^{i\boldsymbol{k}_i\boldsymbol{x}}$ とおけば，散乱の一般論から

$$f(\theta)=-\frac{E}{2\pi}\int d^3x' e^{i(\boldsymbol{k}_i-\boldsymbol{k}_f)\boldsymbol{x}'}\left(-\frac{Ze^2}{r'}\right)$$
$$=\frac{2EZe^2}{(\boldsymbol{k}_i-\boldsymbol{k}_f)^2}=\frac{Ze^2E}{2k^2\sin^2(\theta/2)}$$

ゆえに

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{(Ze^2)^2E^2}{4k^4\sin^4(\theta/2)}=\frac{Z^2e^4}{4m^2v^4\sin^4(\theta/2)}(1-v^2)$$

この結果より，$\left(1-v^2\sin^2\dfrac{\theta}{2}\right)$ という因子がスピン 1/2 の Dirac 粒子に特有なものであり，したがってスピンの効果であることがわかる。なお計算をもっと詳しく調べれば，負のエネルギー状態へいく部分を切り捨てたために断面積が減っていることがわかる。また確率的解釈のできない波動関数を用いて，非相対論的な散乱の一般論から断面積を出しているが，このような手続きを正当化しうるであろうか。詳しい議論は **1-13** に与えられているが，結局正当化のためには場の量子論に基づいた厳密な方法で計算をしなければいけない。これについては本書では述べないが，結果は一致するということだけ付記しておく。

演 習 問 題 2.

1. $\boldsymbol{E}$ も $\boldsymbol{H}$ もゲージ不変であるので，どんなゲージをとっても結果は変わらないはずであるから，我々は Schrödinger 表示での Coulomb ゲージを選ぶ。そうすると

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})=\sum_\lambda\sqrt{\frac{4\pi}{2k_\lambda V}}ik_\lambda \boldsymbol{e}_\lambda(a_\lambda e^{i\boldsymbol{k}_\lambda\boldsymbol{x}}-a_\lambda{}^* e^{-i\boldsymbol{k}_\lambda\boldsymbol{x}})$$
$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})=\sum_\lambda\sqrt{\frac{4\pi}{2k_\lambda V}}i\boldsymbol{k}_\lambda\times \boldsymbol{e}_\lambda(a_\lambda e^{i\boldsymbol{k}_\lambda\boldsymbol{x}}-a_\lambda{}^* e^{-i\boldsymbol{k}_\lambda\boldsymbol{x}})$$

さて $\boldsymbol{E}$ 同士，あるいは $\boldsymbol{H}$ 同士の交換子は $\boldsymbol{k}$ について奇関数を $\boldsymbol{k}$ に関して 3 次元積分することになるので，直ちに 0 になることが確かめられる。さて

$$[E_r(\boldsymbol{x}), H_s(\boldsymbol{y})]=\sum_\lambda\frac{4\pi}{2k_\lambda V}ik_\lambda(\boldsymbol{e}_\lambda)_r\cdot i(\boldsymbol{k}_\lambda\times\boldsymbol{e}_\lambda)_s$$
$$\times(-e^{i\boldsymbol{k}_\lambda(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}+e^{-i\boldsymbol{k}_\lambda(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})})$$

$$=\sum_{\lambda}\frac{4\pi}{2V}(\boldsymbol{e}_{\lambda})_r(\boldsymbol{k}_{\lambda}\times\boldsymbol{e}_{\lambda})_s(e^{i\boldsymbol{k}_{\lambda}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}-e^{-i\boldsymbol{k}_{\lambda}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})})$$

まず $\boldsymbol{k}$ を固定して，光子の偏極方向について加える。そして次の公式を使う。

$$\sum_{\text{pol}}\boldsymbol{e}_a\boldsymbol{e}_b=\delta_{ab}-\frac{\boldsymbol{k}_a\boldsymbol{k}_b}{\boldsymbol{k}^2}$$

そうすると

$$\sum_{\text{pol}}\boldsymbol{e}_r(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{e})_s=\sum_{\text{pol}}\boldsymbol{e}_r\varepsilon_{abs}\boldsymbol{k}_a\boldsymbol{e}_b$$
$$=\varepsilon_{abs}\boldsymbol{k}_a\left(\delta_{rb}-\frac{\boldsymbol{k}_r\boldsymbol{k}_b}{\boldsymbol{k}^2}\right)$$
$$=\varepsilon_{ars}\boldsymbol{k}_a$$

したがって交換子は

$$\sum_{\boldsymbol{k}}\frac{4\pi}{2V}\varepsilon_{rsa}\boldsymbol{k}_a(e^{i\boldsymbol{k}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}-e^{-i\boldsymbol{k}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})})$$
$$=\frac{4\pi}{2V}\frac{V}{(2\pi)^3}\int d^3k\,\varepsilon_{rsa}\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_a}(e^{i\boldsymbol{k}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}+e^{-i\boldsymbol{k}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})})$$
$$=-4\pi i\,\varepsilon_{rsa}\frac{\partial}{\partial x_a}\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$$

2. 量子力学的演算子の正準方程式は

$$\frac{\partial F}{\partial t}=i[H,\ F]$$

より導かれる。いま自由な電磁場を考えると

$$H=\frac{1}{8\pi}\int d^3x\{\boldsymbol{E}^2(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{H}^2(\boldsymbol{x})\}$$

で与えられる。そこで前問の解答を用いて交換子を計算する。

$$\frac{\partial E_r(\boldsymbol{x})}{\partial t}=i\left[\frac{1}{8\pi}\int d^3y\{\boldsymbol{E}^2(\boldsymbol{y})+\boldsymbol{H}^2(\boldsymbol{y})\},\ E_r(\boldsymbol{x})\right]$$
$$=-\frac{i}{8\pi}\left[E_r(\boldsymbol{x}),\ \int d^3y\boldsymbol{H}^2(\boldsymbol{y})\right]$$
$$=-\frac{i}{4\pi}(-4\pi i)\,\varepsilon_{rsa}\frac{\partial}{\partial x_a}\int d^3yH_s(\boldsymbol{y})\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$$
$$=\varepsilon_{asr}\frac{\partial}{\partial x_a}H_s(\boldsymbol{x})$$

すなわち，

$$\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}=\text{rot}\,\boldsymbol{H}$$

となり，真空中の Maxwell 方程式の一つが出てくる。同様にして

$$\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}=-\text{rot}\,\boldsymbol{E}$$

が出てくる。すなわち量子力学的正準方程式は Maxwell 方程式そのものである。このようにして荷電粒子がなければポテンシャルを使わないで，$\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{H}$ とだけで閉じた量子力学的記述ができる。

演習問題 3.

1. この問題は 3-2 の一般論を適用すればよい。また e.d. 近似では電子のスピンは関係ないので考えないことにする。しかし $2p$ 準位は縮退しているので

$$T_{fi}=\sum_m \frac{H'_{0\boldsymbol{k}_f;\,am}H'_{am;\,0\boldsymbol{k}_i}}{\mathcal{E}_0+k_i-\mathcal{E}_a'+(i/2)\Gamma_a(k_i)}\qquad [\mathcal{E}_0=\mathcal{E}(1s),\ \mathcal{E}_a=\mathcal{E}(2p)]$$

を用いる。ただし $\mathcal{E}_a'=\mathcal{E}_a+\Delta\mathcal{E}_a(k_i)$, $m=l_z$ でこの式は共鳴散乱を表わしている。今後は $\mathcal{E}_a'$ を $\mathcal{E}_a$ でおきかえ，$\Gamma_a(k_i)$ は，$k_i=\mathcal{E}_a-\mathcal{E}_0$ のときだけ分母が小さくしたがって T_{fi} が大きくなるから，$\Gamma_a(\mathcal{E}_a-\mathcal{E}_0)=\Gamma_a$ でおきかえることにする。そうすると

$$d\sigma=2\pi V^2\frac{d^3k_f}{(2\pi)^3}\delta(k_f-k_i)\frac{1}{2}\sum_{e_i}\sum_{e_f}|T_{fi}|^2$$

さて $k_i=k_f\equiv k$ とおくと

$$\sum_m H'_{0\boldsymbol{k}_f;\,am}H'_{am;\,0\boldsymbol{k}_i}=e^2\frac{2\pi k}{V}\sum_m\left(\int\psi_0^*\boldsymbol{x}\boldsymbol{e}_f\psi_{am}\,d^3x\right)\left(\int\psi_{am}^*\boldsymbol{x}\boldsymbol{e}_i\psi_0\,d^3x\right)$$

$$=e^2\frac{2\pi k}{V}(\boldsymbol{e}_f\boldsymbol{e}_i)\frac{\Gamma_a}{(4/3)e^2k^3}$$

ゆえに

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{9}{16}\frac{\Gamma_a{}^2}{(\mathcal{E}_0+k-\mathcal{E}_a)^2+(\Gamma_a{}^2/4)}\cdot\frac{1}{2k^2}\sum_{e_i}\sum_{e_f}(\boldsymbol{e}_f\boldsymbol{e}_i)^2$$

$$=\frac{9}{16}\frac{1+\cos^2\theta}{2k^2}\frac{\Gamma_a{}^2}{(\mathcal{E}_0+k-\mathcal{E}_a)^2+(\Gamma_a{}^2/4)}$$

さて角度で積分すれば

$$\sigma=\frac{3\pi}{2k^2}\frac{\Gamma_a{}^2}{(\mathcal{E}_0+k-\mathcal{E}_a)^2+(\Gamma_a{}^2/4)}$$

この式は共鳴エネルギーの付近では非常に大きくなるが，幅が非常に小さくて 100 万分の 1 eV の程度となるので，この式の適用範囲はきわめて小さいが，単に例として考えたものである。共鳴エネルギーからはずれたら他の励起状態も中間状態としてとりあげなければならないし，また H' の中の $H^{(2)}=(e/2m)\boldsymbol{A}^2$ を考慮に入れなければならない。したがってここで考えたのは共鳴散乱の数学的例題と考えるべきである。

2. すでに **3-1** で述べたようにこのときの崩壊幅は

$$\Gamma=\frac{4}{3}e^2k^3\left|\int\psi_{1s}z\psi_{2p,z}\,d^3x\right|^2$$

で与えられる。そこで必要な量は $Km=a^4$ とおくと

$$\mathcal{E}(1s)=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{K}{m}}=\frac{3a^2}{2m},\qquad \mathcal{E}(2p)=\frac{5a^2}{2m},\quad k=\frac{a^2}{m}$$

となり，また波動関数は

$$\psi_{1s}=\left(\frac{a}{\sqrt{\pi}}\right)^{3/2}\exp\left(-\frac{1}{2}a^2r^2\right)$$

$$\psi_{2p,z}=\sqrt{2}\,a\left(\frac{a}{\sqrt{\pi}}\right)^{3/2}z\exp\left(-\frac{1}{2}a^2r^2\right)$$

したがって

$$\int\psi_{1s}z\psi_{2p,z}\,d^3x=\sqrt{2}\,a\left(\frac{a}{\sqrt{\pi}}\right)^3\int e^{-a^2r^2}z^2d^3x$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}\,a}$$

ゆえに

$$\Gamma=\frac{4}{3}e^2k^3\left(\frac{1}{\sqrt{2}\,a}\right)^2=\frac{2}{3}e^2\frac{a^4}{m^3}$$

後の便利のために行列力学による解を与えておこう。

$$H=\frac{\boldsymbol{p}^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2\boldsymbol{x}^2$$

さて次式により $\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{b}^\dagger$ とを定義する。

$$\boldsymbol{b}=\sqrt{\frac{m}{2\omega}}\boldsymbol{x}+\frac{i}{\sqrt{2m\omega}}\boldsymbol{p},\qquad \boldsymbol{b}^\dagger=\sqrt{\frac{m}{2\omega}}\boldsymbol{x}-\frac{i}{\sqrt{2m\omega}}\boldsymbol{p}$$

そうすると

$$[b_i,\,b_j{}^\dagger]=\delta_{ij}\qquad (i,\,j=1,\,2,\,3)$$

となり，ハミルトニアンは

$$H=\omega\left(\boldsymbol{b}^\dagger\boldsymbol{b}+\frac{3}{2}\right)\qquad (b_i{}^\dagger b_i=n_i)$$

また

$$\boldsymbol{p}=\sqrt{\frac{m\omega}{2}}\,\frac{\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}^\dagger}{i},\qquad \boldsymbol{x}=\sqrt{\frac{\omega}{2m}}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^\dagger)$$

さて前の方法で取り扱った行列要素は

$$\int\psi_{1s}z\psi_{2p,z}d^3x=\langle 1s|z|2p,\,z\rangle$$

ただし $1s$ は $n_x=n_y=n_z=0$, $2p,\,z$ は $n_x=n_y=0$, $n_z=1$ で与えられる。したがってこの行列要素は

$$\left\langle 0\left|\sqrt{\frac{\omega}{2m}}(b_3+b_3{}^\dagger)\right|1\right\rangle=\sqrt{\frac{\omega}{2m}}=\frac{1}{\sqrt{2}\,a}\qquad (\text{ただし}\ a^2=m\omega)$$

3. さて電磁的相互作用は電子のときと同様に

$$H'=-\frac{e\boldsymbol{pA}}{m}+\frac{e^2\boldsymbol{A}^2}{2m}=H^{(1)}+H^{(2)}$$

であるから，e^2 での T 行列は再び

$$T_{fi}=H_{fi}^{(2)}+\sum_n\frac{H_{fn}^{(1)}H_{ni}^{(1)}}{E_i-E_n+i\varepsilon}$$

電気的双極子近似では，調和振動子に対する選択則より

$$\Delta n=\Delta(n_x+n_y+n_z)=\pm 1$$

基底状態は $n_x=n_y=n_z=0$ で与えられるから，光を吸って励起される状態は n_x, n_y, n_z のうちのどれか一つ，たとえば n_j が1になった状態で，これを $|j\rangle$ と書く。そしてその励起エネルギーは ω である。中間状態には2種類あり

$$a_j=|j\rangle,\qquad b_j=|\boldsymbol{k}_i,\,\boldsymbol{e}_i;\,\boldsymbol{k}_f,\,\boldsymbol{e}_f:j\rangle$$

そして

$$i=|\boldsymbol{k}_i,\,\boldsymbol{e}_i:0\rangle,\qquad f=|\boldsymbol{k}_f,\,\boldsymbol{e}_f:0\rangle$$

まず T_{fi} の第一項は Thomson 散乱のときと同様に

$$\left\langle f\left|\frac{e^2}{2m}\boldsymbol{A}^2\right|i\right\rangle=\frac{e^2}{2m}\sqrt{\frac{2\pi}{kV}}2(\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_f)=\frac{e^2}{m}\left(\frac{2\pi}{kV}\right)(\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_f)$$

次に

$$\left\langle a_j\left|-\frac{e}{m}\boldsymbol{pA}\right|i\right\rangle=-\frac{e}{m}\langle a_j|\boldsymbol{p}|0\rangle\langle 0|\boldsymbol{A}|i\rangle$$
$$=-\frac{e}{m}\sqrt{\frac{m\omega}{2}}\left(\frac{-1}{i}\right)\sqrt{\frac{2\pi}{kV}}(\boldsymbol{e}_i)_j$$

同様に

$$\left\langle f\left|-\frac{e}{m}\boldsymbol{pA}\right|a_j\right\rangle=-\frac{e}{m}\sqrt{\frac{m\omega}{2}}\left(\frac{1}{i}\right)\sqrt{\frac{2\pi}{kV}}(e_f)_j$$

したがって $E_i-E_a=\mathcal{E}_0-\mathcal{E}_1+k_i=k-\omega$ (ただし $k_i=k_f\equiv k$ とおいている)。

$$\sum_{a_j}\frac{H^{(1)}_{fn}H^{(1)}_{ni}}{E_i-E_n}=\frac{e^2}{m^2}\left(\frac{m\omega}{2}\right)\frac{2\pi}{kV}(\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_f)\frac{1}{k-\omega}$$

ところで $E_i-E_b=\mathcal{E}_0-\mathcal{E}_1-k_f=-(k+\omega)$ であるから，今度は

$$\sum_{b_j}\frac{H^{(1)}_{fn}H^{(1)}_{ni}}{E_i-E_n}=\frac{e^2}{m^2}\left(\frac{m\omega}{2}\right)\frac{2\pi}{kV}(\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_f)\frac{-1}{k+\omega}$$

したがって

$$T_{fi}=\frac{e^2}{m}\frac{2\pi}{kV}(\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_f)\left\{1+\frac{\omega}{2}\left(\frac{1}{k-\omega}-\frac{1}{k+\omega}\right)\right\}$$
$$=T_{\text{Thomson}}\frac{k^2}{k^2-\omega^2}$$

ゆえに

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Thomson}}\left(\frac{k^2}{k^2-\omega^2}\right)^2$$
$$\sigma=\sigma_{\text{Thomson}}\left(\frac{k^2}{k^2-\omega^2}\right)^2$$

さて共鳴エネルギー $k\approx\omega$ では崩壊幅を考慮して，小さい項を捨てると

$$T_{fi}\approx T_{\text{Thomson}}\times\frac{\omega}{2}\frac{1}{k-\omega+(i/2)\Gamma}$$
$$\sigma\approx\sigma_{\text{Thomson}}\frac{\omega^2/4}{(k-\omega)^2+\Gamma^2/4}$$

ただし Γ は前問において計算した崩壊幅である。

4. Thomson 散乱の場合と違うのは，$\boldsymbol{x}_e$ の運動方程式である。

$$m\ddot{\boldsymbol{x}}_e+m\omega^2\boldsymbol{x}_e=e(\boldsymbol{E}+\dot{\boldsymbol{x}}_e\times\boldsymbol{H})$$

ところで $\boldsymbol{x}_e$ は $\boldsymbol{A}_{\text{in}}(0,t)$ と同じく e^{-ikt} という t 依存性をもつから

$$m\left(1-\frac{\omega^2}{k^2}\right)\ddot{\boldsymbol{x}}_e\approx-e\dot{\boldsymbol{A}}_{\text{in}}(0,t)$$

とすれば，$\boldsymbol{x}_e$ の振幅は，Thomson 散乱の場合と比べて

$$\frac{k^2}{k^2-\omega^2}$$

という因子が乗ぜられる。したがってこの結果は前問で示した量子論的計算と一致する。すなわち，散乱振幅も同じ因子を乗ぜられるからである。

おもしろいことは，e.d. 近似をするとこれも古典論と量子論とが同じ結果を与える例となっていることである。

演習問題 4.

1. 4-2 の(13)よりわかるように l 番目の部分波の波動関数 $f_l(r)$ の漸近形は

$$f_l(r)\propto\cot\delta_l\cdot s_l(kr)+c_l(kr)$$

この式は $r>a$ で成り立つ。さて $r<a$ では $f_l(r)=0$ であるから，波動関数の連続性から，$f_l(a)=0$ である。したがって

$$\cot\delta_l\cdot s_l(ka)+c_l(ka)=0$$

ゆえに

$$\cot\delta_l = -\frac{c_l(ka)}{s_l(ka)}$$

この式が位相のずれ δ_l を決めることになる。

2. $\varDelta(k)$ の定義より

$$\varDelta(k) = 1 - \int_0^\infty dr K(r,r) + \frac{1}{2}\int_0^\infty dr \int_0^\infty dr' \begin{vmatrix} K(r,r) & K(r,r') \\ K(r',r) & K(r',r') \end{vmatrix} + \cdots$$

$$= 1 - \int_0^\infty dr\, g(r,r)U(r) + \int_0^\infty dr \int_r^\infty dr' \begin{vmatrix} g(r,r) & g(r,r') \\ g(r',r) & g(r',r') \end{vmatrix} U(r)U(r') + \cdots$$

さて $U(r) = V_0\theta(r-a)$ を代入すると

$$\varDelta(k) = 1 - \frac{i}{2k}V_0\int_0^a dr(e^{2ikr}-1) - \frac{V_0{}^2}{4k^2}\int_0^a dr(e^{2ikr}-1)\int_r^a dr'(e^{2ik(r'-r)}-1) + \cdots$$

$$= 1 - \frac{V_0}{4k^2}(e^{2ika}-1-2ika)$$

$$+ \frac{V_0{}^2}{(4k^2)^2}\{3(1-e^{2ika}) + 2ika(e^{2ika}+2+ika)\} + \cdots$$

ゆえに

$$\varDelta(-k) + \varDelta(k) = 2 - \frac{V_0}{4k^2}(e^{2ika}+e^{-2ika}-2) + \cdots$$

$$\longrightarrow 2\left(1+\frac{1}{2}V_0a^2+\cdots\right) \qquad (k\to 0)$$

$$\varDelta(-k) - \varDelta(k) = \frac{V_0}{4k^2}(e^{2ika}-e^{-2ika}-4ika)$$

$$- \frac{V_0{}^2}{(4k^2)^2}\{3(e^{-2ika}-e^{2ika}) + 2ika(e^{2ika}+e^{-2ika}+4)\} + \cdots$$

$$\longrightarrow -\frac{i}{3}(2ka)(V_0a^2)\left(1+\frac{1}{10}V_0a^2+\cdots\right) \qquad (k\to 0)$$

したがって

$$\lim_{k\to 0} k\cot\delta = i\frac{2\left(1+\frac{1}{2}V_0a^2+\cdots\right)}{-\frac{i}{3}(2a)(V_0a^2)\left(1+\frac{1}{10}V_0a^2+\cdots\right)}$$

$$= -\frac{1}{a}\left(\frac{3}{V_0a^2}\right)\frac{1+\frac{1}{2}V_0a^2+\cdots}{1+\frac{1}{10}V_0a^2+\cdots}$$

$$= -\frac{1}{a}\left(\frac{3}{V_0a^2}\right)\left(1+\frac{2}{5}V_0a^2+\cdots\right)$$

さて厳密解の方は

$$\frac{1}{a}\frac{1+\frac{1}{3}V_0a^2+\cdots}{\left(-\frac{1}{3}V_0a^2\right)\left(1-\frac{1}{15}V_0a^2+\cdots\right)}$$

$$= -\frac{1}{a}\left(\frac{3}{V_0a^2}\right)\frac{1+\frac{1}{3}V_0a^2+\cdots}{1-\frac{1}{15}V_0a^2+\cdots}$$

$$=-\frac{1}{a}\left(\frac{3}{V_0 a^2}\right)\left(1+\frac{2}{5}V_0 a^2+\cdots\right)$$

すなわち展開すると第二項までが厳密解と一致することがわかる。

3. この問題を解くためには

$$(\boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{\sigma}_2), \qquad 3\frac{(\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{r})(\boldsymbol{\sigma}_2\boldsymbol{r})}{r^2}-(\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_2)\equiv S_{12}$$

という演算子のいろいろなスピン状態に対する行列要素を知らなければならない。ただし $\boldsymbol{\sigma}_1$, $\boldsymbol{\sigma}_2$ は $\boldsymbol{\sigma}_{\rm n}$, $\boldsymbol{\sigma}_{\rm p}$ と同じものである。まず

$$\boldsymbol{S}=\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_1+\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_2$$

を2乗すると

$$S(S+1)=\frac{1}{4}\boldsymbol{\sigma}_1{}^2+\frac{1}{4}\boldsymbol{\sigma}_2{}^2+\frac{1}{2}(\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_2)$$
$$=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}(\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_2)$$

そこで $S=0, 1$ とおいてみると $(\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_2)$ の固有値が求まる。すなわち

$$(\boldsymbol{\sigma}_1\cdot\boldsymbol{\sigma}_2)=\begin{cases}1 & \text{スピン三重状態}\\ -3 & \text{スピン一重状態}\end{cases}$$

したがって重陽子に対しては $(\boldsymbol{\sigma}_1\cdot\boldsymbol{\sigma}_2)$ は1でおきかえてよい。

次に S_{12} の行列要素を調べなければならないが，S_{12} は全角運動量とパリティと可換であるから，J とパリティの同じ状態を結びつける。まず S_{12} をスピン一重状態に作用させると0になることは次のようにしてわかる。

$$\boldsymbol{e}=\frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

という単位ベクトルを導入する。4-9 の(3)で定義された $\chi_{0,0}$ を用いると

$$(\boldsymbol{\sigma}_1+\boldsymbol{\sigma}_2)\chi_{0,0}=0$$

ゆえに

$$\{(\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{e})+(\boldsymbol{\sigma}_2\boldsymbol{e})\}^2\chi_{0,0}=0$$

ところが

$$\{(\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{e})+(\boldsymbol{\sigma}_2\boldsymbol{e})\}^2=2\boldsymbol{e}^2+2(\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{e})(\boldsymbol{\sigma}_2\boldsymbol{e})$$
$$=2\{1+(\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{e})(\boldsymbol{\sigma}_2\boldsymbol{e})\}$$

ゆえに

$$(\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{e})(\boldsymbol{\sigma}_2\boldsymbol{e})\chi_{0,0}=-\chi_{0,0}$$
$$S_{12}\chi_{0,0}=\{3(\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{e})(\boldsymbol{\sigma}_2\boldsymbol{e})-(\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_2)\}\chi_{0,0}$$
$$=\{-3-(-3)\}\chi_{0,0}$$
$$=0$$

したがって S_{12} はスピン三重状態に作用させると，再びスピン三重状態が得られることは S_{12} の Hermite 性から明らかであろう。さてスピン三重状態に作用させるためには，スピンと軌道角運動量とを合成した波動関数を導入せねばならない。軌道角運動量 L とスピン S とを合成して，全角運動量 J，その z 成分が M の spin angle 波動関数を

$$\mathcal{Y}^M_{JLS}=\sum_{m_L+m_S=M}C_{LS}(J, M\,;\, m_L, m_S)Y_{L,m_L}(\theta,\varphi)\chi_{S,m_S}$$

のように表わす。C_{LS} は Clebsch–Gordan 係数とよばれる†。この波動関数は正しく規格化されているものとする。

さて重陽子は $J=1$，パリティ偶，$S=1$ の状態であるから，$L=0, 2$ のみが可能な値である。したがって我々が必要とするのは

$$\mathcal{Y}_{101}^{M} \quad \text{および} \quad \mathcal{Y}_{121}^{M}$$

である。ここに $M=1$ のときの具体例を示すと

$$\mathcal{Y}_{101}^{1}=Y_{0,0}\chi_{1,1}$$

$$\mathcal{Y}_{121}^{1}=\sqrt{\frac{6}{10}}Y_{2,2}\chi_{1,-1}-\sqrt{\frac{3}{10}}Y_{2,1}\chi_{1,0}+\sqrt{\frac{1}{10}}Y_{2,0}\chi_{1,1}$$

さて S_{12} をこれらの波動関数に作用させると，S_{12} が Hermite ということで

$$S_{12}\mathcal{Y}_{101}^{M}=a\mathcal{Y}_{101}^{M}+b\mathcal{Y}_{121}^{M}$$

$$S_{12}\mathcal{Y}_{121}^{M}=b\mathcal{Y}_{101}^{M}+c\mathcal{Y}_{121}^{M}$$

という形になることがわかる。そこで a, b, c を決めることを考える。さて S_{12} は，

$$(\boldsymbol{\sigma e})=\sigma_x \sin\theta\cos\varphi+\sigma_y\sin\theta\sin\varphi+\sigma_z\cos\theta$$

を用いると，Pauli のスピン行列と角変数 θ, φ とで表わせる。そして容易にわかるように

$$\int S_{12}d\Omega=0$$

さて $\mathcal{Y}_{101}^{M}$ は角変数によらないから，上の第一式を立体角で積分すると，上の式より 0 になる。同様に右辺第二項も 0 になる。したがって

$$a=0$$

次に b を決めるには，$M=1$ と選び，$\theta=0$ のときの両辺を比較すると，左辺は

$$\{3\sigma_{1z}\sigma_{2z}-(\boldsymbol{\sigma}_1\cdot\boldsymbol{\sigma}_2)\}\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\alpha\alpha=\frac{2}{\sqrt{4\pi}}\alpha\alpha$$

他方右辺は

$$b\mathcal{Y}_{121}^{1}(\theta=0)=b\sqrt{\frac{1}{10}}Y_{2,0}(\theta=0)\chi_{1,1}$$

$$=b\frac{1}{\sqrt{8\pi}}\alpha\alpha$$

これから直ちに

$$b=\sqrt{8}$$

次に，第二式において $\theta=0$ とおくと，上と同様に c が定まり

$$c=-2$$

この結果をまとめると

$$S_{12}\mathcal{Y}_{101}^{M}=\sqrt{8}\mathcal{Y}_{121}^{M}$$

$$S_{12}\mathcal{Y}_{121}^{M}=\sqrt{8}\mathcal{Y}_{101}^{M}-2\mathcal{Y}_{121}^{M}$$

そこで重陽子の波動関数を

$$\varphi=\varphi_S+\varphi_D=\frac{u(r)}{r}\mathcal{Y}_{101}^{M}+\frac{w(r)}{r}\mathcal{Y}_{121}^{M}$$

---

† $C_{jj'}(J, M\,;\,m, m')$ はしばしば $(jj'mm'|jj'JM)$ とも書かれる。ここで使っている記号は J. M. Blatt & V. F. Weisskopf: *Theoretical Nuclear Physics* (John Wiley & Sons, New York, 1952) によっている。

とおくと，第一項が $^3S_1$ を，第二項が $^3D_1$ を表わしている。そこで重陽子に対する Schrödinger 方程式を書く。まず運動エネルギーは

$$T=\frac{1}{M}\left(-r\frac{d^2}{dr^2}r+\frac{\boldsymbol{L}^2}{r^2}\right)$$

と書けることを使って

$$(T+V)\varphi=E\varphi$$

にいままで出したいろいろな知識を使ってやると，結局

$$-\frac{1}{M^2}\frac{d^2u}{dr^2}+\{V_a(r)+V_b(r)\}u-Eu=-\sqrt{8}\,V_c(r)w$$

$$-\frac{1}{M^2}\left(\frac{d^2w}{dr^2}-\frac{6w}{r^2}\right)+\{V_a(r)+V_b(r)-2V_c(r)\}w-Ew=-\sqrt{8}\,V_c(r)u$$

が得られる。これが求める解である。この波動関数の規格化は

$$\int\{u(r)^2+w(r)^2\}dr=1$$

で与えられる。

4. $(\Phi_b, \Psi_a{}^{(+)})$ の中で $\Psi_a{}^{(+)}$ の具体的な形を代入すると

$$\frac{1}{E_a-E_b+i\varepsilon}T_{ba}$$

という極が含まれている。したがって (E_a-E_b) を乗じても有限になる。

索　引

西島和彦 略歴
(にしじま かずひこ)

1926年　茨城県に生まれる
1948年　東京大学理学部物理学科卒業
1950年　大阪市立大学理工学部助手
1954年　同　講師
1956～57年　Max-Planck-Institut für Physik (Göttingen) に客員
1957～58年　Institute for Advanced Study (Princeton) に客員
1959年　大阪市立大学理工学部助教授
Illinois 大学物理学科教授
1965年　International Center for Theoretical Physics (Trieste) に客員
1966年　東京大学理学部教授

主要著書

Fundamental Particles
(W. A. Benjamin, New York, 1963年)
Fields and Particles
(W. A. Benjamin, New York, 1969年)

昭和48年4月20日 初版発行

新物理学シリーズ 13
相対論的量子力学

著　者　西島和彦
発行者　山本健二

発行所　株式会社 培風館
東京都千代田区九段南 4-3-12・郵便番号 102
電話 (03) 262-5256 (代表)・振替東京 44725

定価 ¥ 1200.

日東紙工印刷・三水舎製本

著者の承認をえて検印を省略しました

3342-2413-6955